Patricia Segonds
Maître de conférences à l'université
Joseph Fourier de Grenoble
Sylvie Le Boiteux
Professeur à l'université Bordeaux I
Jean-Paul Parisot
Professeur à l'université Bordeaux I

Optique en 26 fiches

DUNOD

Consultez nos parutions sur dunod.com



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.



Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

ISBN 978-2-10-053938-3

Table des matières

FICHE 1

Les ondes électromagnétiques et l'optique géométrique

I Les ondes électromagnétiques

Les ondes électromagnétiques sont des phénomènes périodiques qui, contrairement au son, se propagent aussi bien dans le vide que dans l'air. Dans le vide, leur vitesse est la plus grande qui puisse exister dans l'Univers. On parle de la célérité ou de la vitesse de la lumière et elle est représentée par le symbole c. Sa valeur est connue avec une très grande précision : $c = 299\,792{,}458$ km/s ; la coutume, dans les applications numériques, est de considérer sa valeur approchée par excès, $c = 3 * 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Le 10 octobre 1983, la vitesse de la lumière est devenue une constante fondamentale de la physique. Dans les milieux matériels isotropes, les ondes électromagnétiques se propagent à une vitesse plus lente notée v. Si n est l'indice du milieu traversé, on peut écrire $v = c/n$.

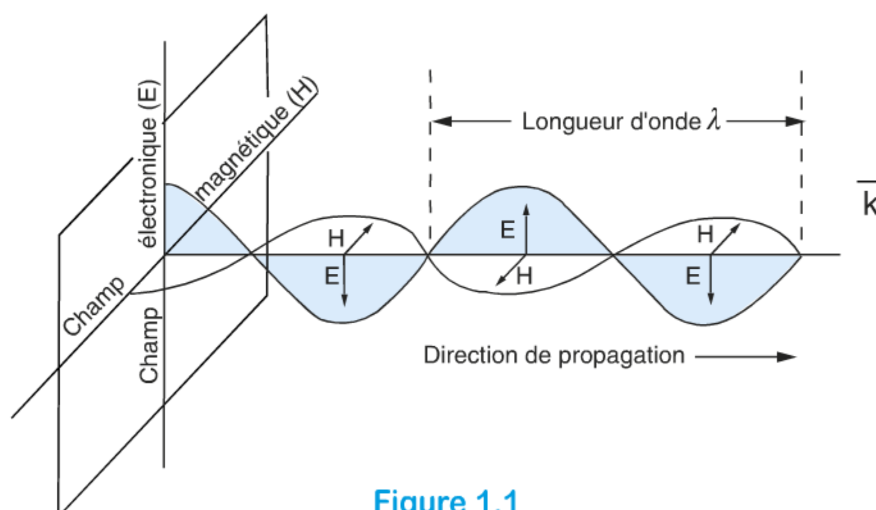


Figure 1.1

Les ondes électromagnétiques sont constituées d'un vecteur champ électrique $\overrightarrow{E}$ et d'un vecteur champ magnétique $\overrightarrow{H}$, perpendiculaires entre eux (Figure 1.1). Ils sont situés dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde repérée par le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$. Dans un milieu isotrope, le vecteur $\overrightarrow{k}$ est confondu avec le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ qui repère la direction de propagation de l'énergie.

L'optique des milieux isotropes non magnétiques s'intéresse uniquement au champ électrique $\overrightarrow{E}$ qui oscille périodiquement en fonction du temps avec une pulsation ω (unité : rad/s (radian/seconde)), une fréquence ν (unité : Hz (hertz)) et une période T (unité : s (seconde)). Ces trois dernières quantités sont reliées et l'on a :

$$\nu = 1/T$$
$$\omega = 2\pi \times \nu = 2\pi/T$$

- **La longueur d'onde λ**

La distance parcourue par le champ électrique $\overrightarrow{E}$ pendant sa période d'oscillation T représente la longueur d'onde λ (unité : m (mètre)) (Figure 1.1). Les ondes électromagnétiques sont généralement classées selon la valeur de leur fréquence ν. On peut aussi utiliser, pour ce classement, la longueur d'onde λ. Pour cela, il faut considérer la relation qui relie la fréquence ν à la longueur d'onde λ. Cette relation dépend du milieu dans lequel l'onde se propage : dans le vide, $\lambda \times \nu = c$ et dans la matière d'indice n, $\lambda \times \nu = v = c/n$. La valeur de la longueur d'onde λ dépend donc du milieu que l'onde électromagnétique traverse.

- **Les ondes monochromatiques et polychromatiques**

Lorsque l'onde électromagnétique est caractérisée par une seule fréquence ν (ou de manière équivalente une seule longueur d'onde λ), elle est dite monochromatique. Dans le cas contraire, elle est dite polychromatique.

- **Le spectre des ondes électromagnétiques**

Les ondes électromagnétiques, classées en fonction de la fréquence, constituent un spectre très vaste qui va des ondes radio, dont la fréquence est voisine de 100 kHz, jusqu'aux rayons gamma, de fréquence 10^{20} Hz provenant de l'espace interstellaire ou du soleil. Ce spectre est donné tableau 1.1.

- **La lumière que nous voyons : le visible**

La lumière que nous voyons, la lumière visible, n'est qu'une petite partie du vaste spectre des ondes électromagnétiques. Le champ électrique de la lumière visible a une fréquence d'oscillation comprise entre $385 * 10^{12}$ Hz et $750 * 10^{12}$ Hz.
Dans le vide, les longueurs d'onde λ du visible sont comprises entre 0,4 µm et 0,8 µm (où 1 µm vaut 10^{-6} m).

Tableau 1.1

Gamme	Nom	Fréquence
VLF	radio (GO)	3 kHz à 30 kHz
LF	radio (GO)	30 kHz à 300 kHz
MF	radio (OM)	300 kHz à 3 MHz
HF	radio (OC), radiotéléphone, CB	3 MHz à 30 MHz
VHF	TV, FM	30 MHz à 300 MHz
UHF	TV, radar & micro-ondes (bandes L, S)	300 MHz à 3 GHz
SHF	radar & micro-ondes (bandes C, X, K)	3 GHz à 30 GHz
EHF	radar & micro-ondes	30 GHz à 300 GHz
	infrarouge	300 GHz à 385 000 GHz
	lumière visible	385 000 GHz à 750 000 GHz
	ultraviolet	750 000 GHz à 6 millions de GHz
	rayons X	6 millions de GHz à 300 milliards de GHz
	rayons gamma	Au-delà de 300 milliards de GHz

II La propagation des ondes électromagnétiques

- **Les rayons**

Dans le vide, une onde électromagnétique se propage en ligne droite à la vitesse c. Il en est de même dans un milieu transparent et isotrope, où la propagation se fait à une vitesse v. Dans tous les cas, pour matérialiser la propagation d'une onde électromagnétique, on représente des rayons sous forme de vecteurs issus de la source ; le sens de la flèche donne le sens de déplacement de l'onde.

- **L'indice de réfraction *n***

Tous les milieux matériels sont caractérisés par un indice de réfraction noté n ; cette quantité est toujours supérieure à 1 (on considère que pour le vide $n = 1$). L'indice de réfraction d'un milieu matériel est une grandeur sans dimension et n'a donc pas d'unité. Il dépend de la longueur d'onde de l'onde électromagnétique qui traverse le milieu. Il dépend aussi des conditions thermodynamiques locales du milieu comme sa densité, sa pression ou sa température.

- **L'optique géométrique**

  L'optique géométrique se préoccupe essentiellement de la trajectoire de rayons issus de sources ponctuelles, ce qui est toujours le cas si elles sont situées à une très grande distance de l'observateur. Le formalisme de l'optique géométrique est particulièrement adapté quand les dimensions des milieux étudiés sont très grandes devant la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique qui les traverse.

Voyez vous cette onde !

1) Une onde électromagnétique de fréquence ν égale à 500 000 GHz se propage dans le vide.
Quelles sont sa vitesse de propagation et sa longueur d'onde ? A quelle partie du spectre des ondes électromagnétiques appartient-elle et a-t-elle une couleur ?
2) L'onde pénètre maintenant dans un milieu d'indice de réfraction $n = 2{,}5$. Quelles sont sa nouvelle vitesse, sa fréquence et sa longueur d'onde ? Peut-on encore lui attribuer une couleur ?

Solution

1) La vitesse de propagation dans le vide est $c = 3 * 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. La longueur d'onde dans le vide est donnée par $\lambda = c/\nu = 0{,}6 * 10^{-6}\ \text{m} = 0{,}6\ \mu\text{m}$. Cette onde appartient au spectre visible et est de couleur rouge.
2) Dans un milieu d'indice $n = 2{,}5$, la vitesse de propagation devient : $v = c/n = 1{,}2 * 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cependant sa fréquence ν et donc sa couleur sont inchangées dans le milieu. Par contre, sa longueur d'onde est égale à $\lambda' = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{c}{\nu n} = \lambda/n = 0{,}24\ \mu\text{m}$.

Quelle est la hauteur de cet immeuble ?

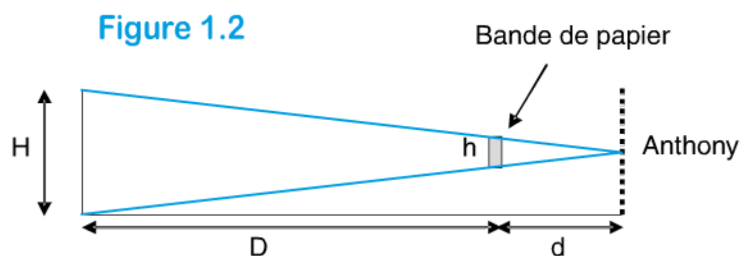
Anthony rentre du lycée en comptant soigneusement ses pas entre son immeuble et celui qui se trouve en face de chez lui. Il en déduit que les deux édifices sont séparés de $D = 100$ m. Il monte alors en courant dans son appartement et se précipite devant la fenêtre de sa chambre pour coller sur la vitre une bande de papier rectangulaire de $h = 20$ cm de haut dont la largeur cache seulement celle de l'immeuble d'en face. Quand Anthony s'écarte d'une distance $d = 80$ cm de la bande de papier, cet immeuble disparaît de sa vue.
Montrer comment il va pouvoir épater ses copains en déduisant la hauteur de l'immeuble situé à 100 m du sien ?

Solution

Une application du théorème de Thalès donne (Figure 1.2) :

$$\frac{H}{D+d} = \frac{h}{d}, \text{ soit } H = 25{,}2 \text{ m}.$$

Figure 1.2



Dispersion de l'indice de réfraction

La fiche technique d'une plaque de verre isotrope et transparente indique que son indice de réfraction dépend de la longueur d'onde selon la loi suivante : $n(\lambda) = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$, où λ est la longueur d'onde, exprimée en microns ; A et B sont des constantes : $A = 1{,}3452$ et $B = 3315{,}53 * 10^{-6}$ µm².
Quel est l'écart relatif sur la valeur de l'indice de réfraction de la plaque de verre selon qu'elle est traversée par de la lumière verte de longueur d'onde $\lambda_{\text{verte}} = 0{,}558$ µm ou de la lumière bleue de longueur d'onde $\lambda_{\text{bleue}} = 0{,}400$ µm ?

Solution

Une application numérique simple donne $n(\lambda_{\text{verte}}) = 1{,}3558$ et $n(\lambda_{\text{bleue}}) = 1{,}3659$, soit un écart relatif entre les valeurs de l'indice de $\dfrac{n(\lambda_{\text{bleue}}) - n(\lambda_{\text{verte}})}{n(\lambda_{\text{verte}})} = \Delta n/n(\lambda_{\text{verte}}) \approx \Delta n/n(\lambda_{\text{bleu}}) \ = 7{,}4 \cdot 10^{-3}$.

Les lois de Snell-Descartes

Les lois de Snell-Descartes décrivent le comportement d'un rayon lumineux qui traverse une surface de séparation entre deux milieux appelée dioptre. On note n et n' les indices de réfraction de ces deux milieux, situés de part et d'autre du dioptre.

Soit I le point d'impact du rayon incident sur la surface de séparation. Ce rayon incident est généralement partagé en deux : le rayon réfléchi qui ne change pas de milieu et le rayon réfracté qui se propage dans le deuxième milieu. Le plan contenant le rayon incident et la normale en I est appelé plan d'incidence. Les rayons réfléchi et réfracté restent dans ce plan (Figure 2.1).

Soient i, j et r les angles que font respectivement, avec la normale en I, les rayons incident, réfléchi et réfracté (Figure 2.1).

Les lois de Snell-Descartes établissent des relations entre ces trois angles :

- Le rayon réfléchi fait, avec la normale un angle j égal à l'angle d'incidence i. On a donc $i = j$.
- Le rayon réfracté fait, avec la normale, un angle r tel que $n \sin i = n' \sin r$.

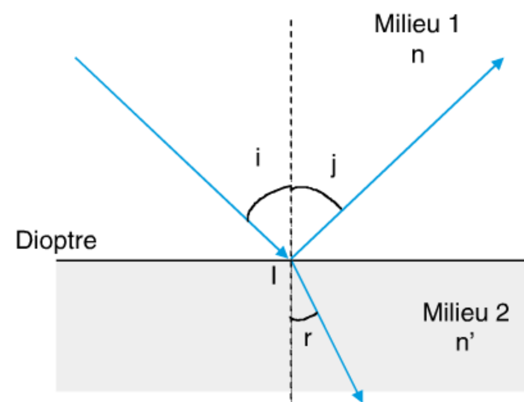


Figure 2.1

I La loi de Kepler

Si l'angle d'incidence i est petit (typiquement inférieur à 20°, pour un milieu d'indice de réfraction $n = 1{,}5$), l'angle r l'est aussi. L'approximation des petits angles s'applique : $\sin i \approx i$ et $\cos i \approx 1$. Dans ce cas, la deuxième loi de Snell-Descartes s'écrit : $ni \approx n'r$. C'est la loi de Kepler.

II L'indice relatif et la réfringence

Lorsqu'un rayon se propage d'un milieu d'indice n vers un milieu d'indice n', on définit l'indice relatif $n_r = \dfrac{n'}{n}$.

- Si $n_r > 1$, le rayon se propage d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent.
- Si $n_r < 1$, le rayon se propage d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent.

III Interprétation des lois de Snell-Descartes

A priori, l'angle d'incidence i peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 180°. Comme la propagation des rayons est symétrique par rapport à la normale, on discutera uniquement la variation de i entre 0 et 90°. Les valeurs prises par l'angle réfracté r sont régies par les lois de Snell-Descartes. Elles dépendent donc des valeurs de n et de n' ou, de manière équivalente, de la valeur de n_r.

IV Le principe du retour inverse de la lumière

Si une onde électromagnétique emprunte un chemin dans un sens, et que le rayon est renvoyé sur lui-même, il suivra exactement le même chemin en sens inverse. C'est ce qu'on appelle le principe du retour inverse de la lumière. Cette propriété est vraie aussi pour une propagation à travers un dioptre ou tout autre élément optique.

Le brouillard

Un rayon parallèle monochromatique de longueur d'onde λ éclaire une goutte d'eau en suspension dans l'air (Figure 2.2). On suppose que l'air a un indice de réfraction égal à 1 et que la goutte d'eau est sphérique, avec un indice de réfraction $n = 4/3$.

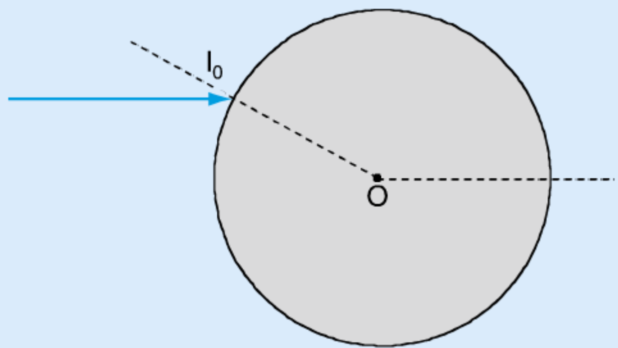


Figure 2.2

1) Qu'arrive-t-il à ce rayon incident quand il traverse la goutte d'eau ?

2) Tracer le cheminement à travers cette goutte d'un autre rayon parallèle à celui étudié précédemment et symétrique par rapport au diamètre de la goutte ?

3) Si l'on suppose que la source est constituée par les phares d'une voiture et que tous les rayons parallèles émis traversent une multitude de gouttes d'eau en suspension dans l'air, quel est le phénomène décrit ?

Solution

1) Considérons la Figure 2.3 ; le triangle OI_0I_1 est isocèle puisque deux de ses côtés sont des rayons du cercle. Ceci implique que l'angle réfracté en I_0, noté r, est aussi l'angle d'incidence en I_1. Ainsi, le rayon émergent de la goutte au point I_1 fait un angle i, égal à l'angle d'incidence dans la goutte en I_0. Le rayon incident en I_0 peut toujours pénétrer dans la goutte car il se propage vers un milieu plus réfringent. Par conséquent, en vertu du principe du retour inverse de la lumière, le rayon peut toujours émerger de la goutte en I_1.

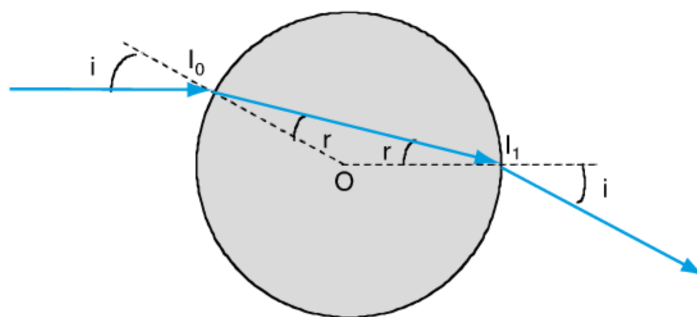


Figure 2.3

2) Sur la Figure 2.4, on peut voir le cheminement à travers la goutte d'un autre rayon incident parallèle, symétrique par rapport au diamètre de la goutte du rayon représenté Figure 2.3. Le faisceau incident parallèle devient divergent en sortie de la goutte.

3) En supposant que la source est constituée par les phares d'une voiture et qu'un ensemble de rayons parallèles traverse une multitude de gouttes d'eau en suspension dans l'air, on décrit le phénomène de la diffusion de lumière dans le brouillard : les gouttes d'eau du brouillard réfractent les rayons parallèles du faisceau incident qui divergent après la goutte.

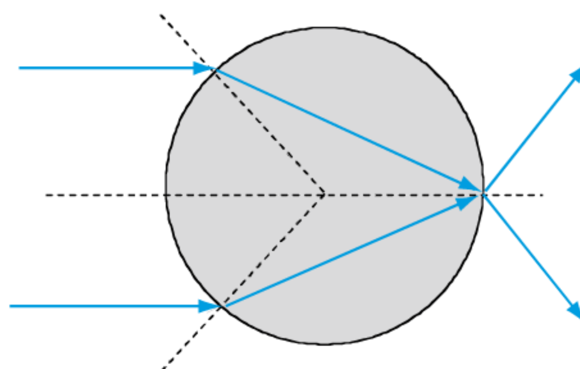


Figure 2.4

Des microsphères dans la peinture des panneaux de signalisation

Considérons une microsphère de rayon R et d'indice supérieur à 1. La surface située à l'opposée des rayons incidents est totalement réfléchissante (Figure 2.5). Cette microsphère est éclairée par un faisceau de rayons parallèles issu des phares d'une voiture.
Tracer le trajet du faisceau dans la microsphère et en déduire l'intérêt de la présence de tels éléments dans la peinture des panneaux de signalisation.

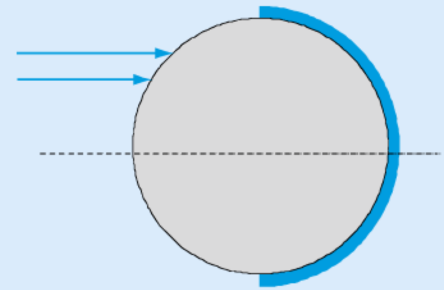


Figure 2.5

Solution

Si la partie droite de la microsphère est réfléchissante, le faisceau qui y pénètre par la partie gauche revient, après réfraction, vers la source, symétriquement par rapport au diamètre de la sphère (Figure 2.6). C'est ainsi que fonctionnent les panneaux de signalisation réfléchissants. La peinture contient des microsphères qui, éclairées par les phares de nos voitures, nous renvoient la lumière.

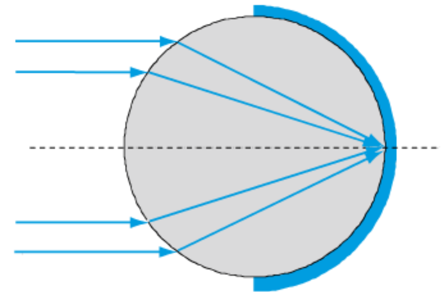


Figure 2.6

Influence de la courbure de la Terre

Un rayon en provenance d'une étoile lointaine arrive de l'espace d'indice égal à 1. Il rencontre les couches de l'atmosphère, d'indice constant égal à n_0, avec un angle d'incidence i par rapport à la normale à la surface de la terre.

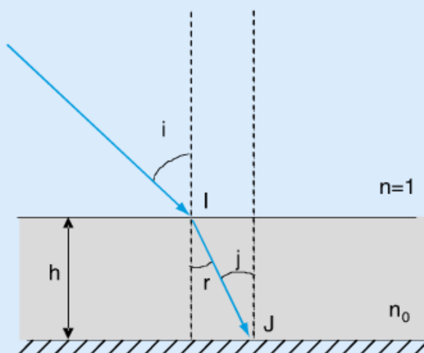


Figure 2.7a

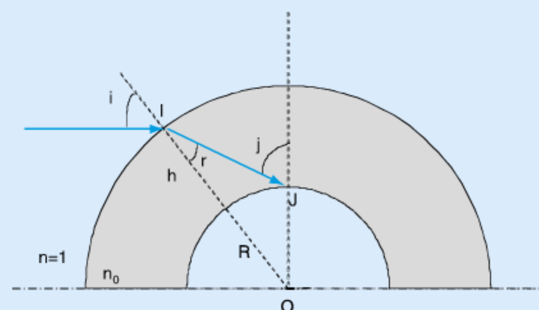


Figure 2.7b

1) Si l'atmosphère est supposée plane, d'épaisseur constante h, quelle relation lie l'angle d'incidence i à l'angle j que fait le rayon avec la normale au sol (Figure 2.7a).
2) Si l'atmosphère est assimilée à une couche sphérique limitée par les rayons R et $R+h$ où R est le rayon de la Terre (Figure 2.7b), quelle est la nouvelle relation entre les angles i et j ?
3) On donne $i = 45°$, $n_0 = 1{,}000279$, $R = 6370$ km et $h = 8$ km. Calculer, dans le cas d'une atmosphère plane, puis sphérique, les valeurs de l'angle j.

Solution

1) Considérons la Figure 2.7a qui montre la marche d'un rayon traversant l'atmosphère plane. Les angles r et j sont alternes internes, donc $r = j$; r et i sont reliés par la loi de Snell-Descartes qui s'écrit $\sin i = n_0 \sin r$, où n_0 est l'indice de l'atmosphère. On en déduit que la relation entre les angles i et j est $\sin i = n_0 \sin j$.
2) Considérons maintenant la Figure 2.7b où un rayon traverse une atmosphère sphérique d'indice n_0. Dans le triangle OIJ, la relation des sinus s'écrit $\dfrac{\sin r}{R} = \dfrac{\sin(\pi - j)}{R+h} = \dfrac{\sin j}{R+h}$. Or, en I on a : $\sin i = n_0 \sin r$, donc $\dfrac{\sin r}{R} = \dfrac{\sin i}{n_0 R} = \dfrac{\sin j}{R+h}$; la nouvelle relation entre les angles i et j est donc $(R+h)\sin i = n_0 R \sin j$.
3) Atmosphère plane : $j = 44{,}984° = 44°59'2''$.
Atmosphère sphérique : $j = 45{,}056° = 45°3'22''$. La courbure de la Terre a donc une très faible influence sur la réfraction des rayons de l'atmosphère.

FICHE 3
La réfraction : deux cas possibles

I Propagation vers un milieu plus réfringent

Si un rayon se propage vers un milieu plus réfringent après avoir traversé une surface de séparation (Figure 3.1), les angles d'incidence i et de réfraction r sont liés par la relation $n \sin i = n' \sin r$ avec $n_r = \dfrac{n'}{n} > 1$. Ainsi r est toujours inférieur ou égal à i et le rayon incident, dévié après réfraction, se rapproche toujours de la normale à la surface de séparation. Le rayon réfracté existe toujours mais son angle avec la normale atteint une valeur limite qui correspond à $i = 90°$. C'est l'incidence rasante. Elle induit un angle de **réfraction limite**, r_{lim}, donné par $\sin r_{\text{lim}} = \dfrac{1}{n_r}$. Si $n_r = 1{,}5$, $r_{\text{lim}} = 41{,}81°$.

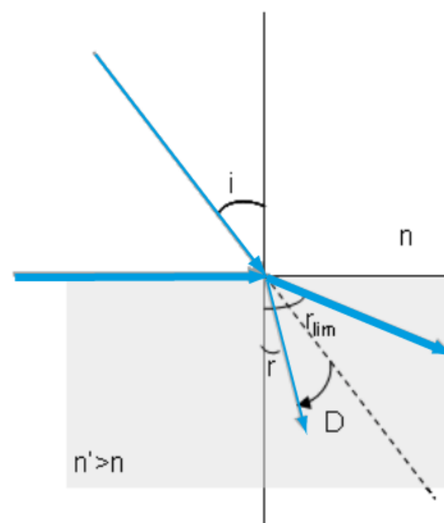


Figure 3.1

II Propagation vers un milieu moins réfringent

Si un rayon traverse une surface de séparation et se propage vers un milieu moins réfringent (Figure 3.2), les angles d'incidence i et de réfraction r sont toujours liés par la relation $n \sin i = n' \sin r$ mais $n_r < 1$. Ainsi r est toujours supérieur ou égal à i et le rayon incident, dévié après réfraction, s'écarte toujours de la normale à la surface de séparation. Dans ce cas, le rayon réfracté n'existe plus pour un angle d'incidence supérieur à un angle limite i_{lim} dont la valeur est fixée par $\sin i_{\text{lim}} = n_r$, avec $r_{\text{lim}} = 90°$ et $n_r = \dfrac{n'}{n}$. On est alors en situation de **réflexion totale**.

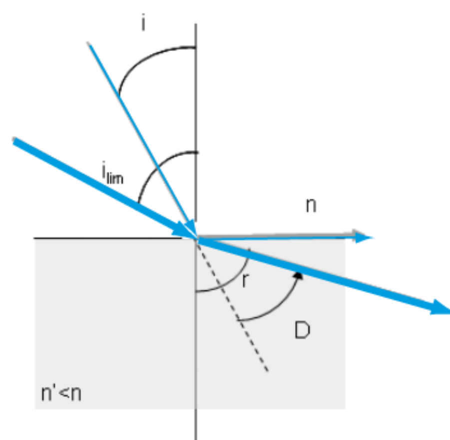


Figure 3.2

En vertu du principe du retour inverse de la lumière, si $n_r = 1{,}5$, $i_{\text{lim}} = 41{,}81°$.

III La déviation

Quand un rayon traverse un dioptre et change de milieu, il est en général dévié. La déviation est l'angle dont il faut faire tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon réfracté. Contrairement à i ou r, D est par définition un angle orienté. Avec les conventions habituelles, quand un rayon se propage vers un milieu plus réfringent après la traversée d'un dioptre, l'angle D est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre et est négatif (Figure 3.1). Si, au contraire, le rayon se propage vers un milieu moins réfringent, l'angle D est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ; il est donc positif (Figure 3.2).

La réflexion d'ondes courtes sur l'ionosphère

L'atmosphère terrestre est composée de différentes couches caractérisées, par exemple, par leur densité et la température. Pour simplifier le problème, on ne considèrera que deux d'entre elles : une située au dessus de 100 km d'altitude, l'ionosphère, et l'autre située en dessous de 100 km que l'on assimilera à l'atmosphère neutre (Figure 3.3). L'indice de réfraction de l'ionosphère (n_{ion}) est inférieur à celui de l'atmosphère neutre (n_{neu}) et $n_{ion}/n_{neu} = 0{,}908$. On suppose que la propagation d'une onde radio dans l'atmosphère neutre peut être traitée par l'optique géométrique et qu'à cette longueur d'onde, le sol est parfaitement réfléchissant.

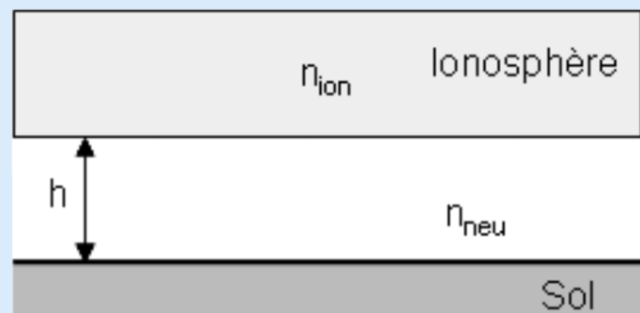


Figure 3.3

1) A quelle condition l'onde radio, issue du sol, se réfléchit-elle sur l'ionosphère ?
2) Comment dans ces conditions l'onde se propage-t-elle dans l'atmosphère neutre ?
3) Combien de réflexions subit l'onde radio en allant de Paris vers Nice, si son angle d'incidence est égal à 68° et si ces deux villes sont distantes de 990 km ?

Solution

1) Lorsque l'onde radio rencontre la surface de séparation entre l'ionosphère et l'atmosphère neutre, elle vérifie la loi de Snell-Descartes, écrite en condition de réflexion totale sur l'ionosphère : $n_{neu} \sin i \geqslant n_{ion}$, soit $\sin i \geqslant \dfrac{n_{ion}}{n_{neu}}$. L'onde radio se réfléchit donc sur l'ionosphère si $i \geqslant 65{,}23°$.
2) Après s'être réfléchie sur l'ionosphère, l'onde se réfléchit sur la terre en satisfaisant la loi de réflexion de Snell-Descartes ($i = j$) et on peut imaginer que cela se reproduit indéfiniment (Figure 3.4).

3) L'onde radio qui se réfléchit entre l'ionosphère et la surface de la Terre parcourt sur la terre une distance L donnée par $L = 2h \tan i$, où h est l'altitude de l'ionosphère. Si $i = 68°$, on trouve $L = 495$ km. Pour aller de Paris à Nice, villes distantes de 1000 km, on peut considérer que l'onde radio parcourt la distance $2L = 990$ km sur la terre (Figure 3.4). Elle se réfléchit donc une fois à la surface de la Terre et deux fois sur l'ionosphère.

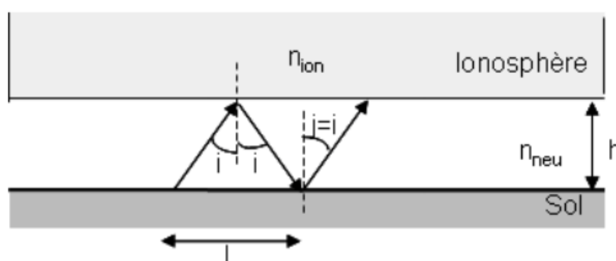


Figure 3.4

Le diamant dans l'eau

Un rayon lumineux rentre dans une cuve d'eau en incidence normale. Il se propage de l'eau vers le diamant et arrive ensuite sur l'interface air-diamant (Figure 3.5). Les indices de réfraction respectifs sont : $n_{air} = n = 1$; $n_{eau} = n_1 = 1{,}33$; $n_{diamant} = n_2 = 2{,}42$. On néglige l'épaisseur des parois de la cuve.

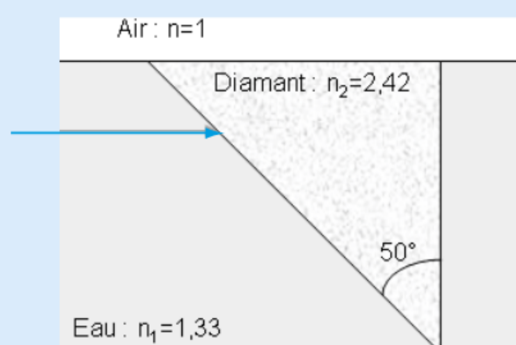


Figure 3.5

1) Quelle est la vitesse de la lumière dans l'air, dans l'eau et dans le diamant ?
2) Calculer les angles de réfraction ou de réflexion sur les différentes interfaces.
3) Par quelle face de la cuve le rayon va-t-il sortir ?

Solution

1) Dans l'air, la vitesse de la lumière $c = 3 * 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; dans l'eau, $v_{eau} = \dfrac{c}{n_1}$ $= 2{,}25 * 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ et dans le diamant, $v_{diamant} = \dfrac{c}{n_2} = 1{,}24 * 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

2) Les propriétés des angles alternes internes permettent de montrer que l'angle i est égal à l'angle au sommet E du prisme soit 50° (Figure 3.6). En I, $i = 50°$, la relation de Snell-Descartes s'écrit $1{,}33 \sin i = 2{,}42 \sin r_1$ et $r_1 = 24{,}90°$. Considérons le triangle AIJ ; on a $(r_1 + 90°) + 40° + (90° - r_2) = 180°$ et $r_2 = r_1 + 40° = 64{,}90°$. En J, on constate alors que $n_2 \sin r_2 > 1$; il y a donc réflexion totale et on retrouve l'angle r_2 après la réflexion en J.
On en déduit qu'à l'interface diamant-eau, en K, $r_3 = 90° - r_2 = 25{,}10°$ et la relation de Snell-Descartes en K s'écrit $2{,}42 \sin r_3 = 1{,}33 \sin r_4$ et donne $r_4 = 50{,}52°$.
Enfin, en L, $r_5 = r_4 = 50{,}52°$ (angles alternes internes) et on a de nouveau $n_1 \sin r_5 > 1$. Il y a donc réflexion totale en L. Si les parois du récipient d'eau sont en verre, dont on néglige l'épaisseur, le rayon après réflexion totale en L, revient dans

l'eau en M. En ce point, l'angle d'incidence est $r_6 = r_4 = 50{,}52°$ et l'angle de réfraction $r_7 = r_3 = 25{,}10°$ en vertu du principe du retour inverse de la lumière. Enfin, si on considère le triangle NME, on a

$$50° + (90° - r_7) + (90° - r_8) = 180°$$

et l'angle d'incidence à l'interface diamant-eau en N est $r_8 = 50° - r_7 = 24{,}90°$. On constate que $r_8 = r_1$ donc $r_9 = i = 50°$.

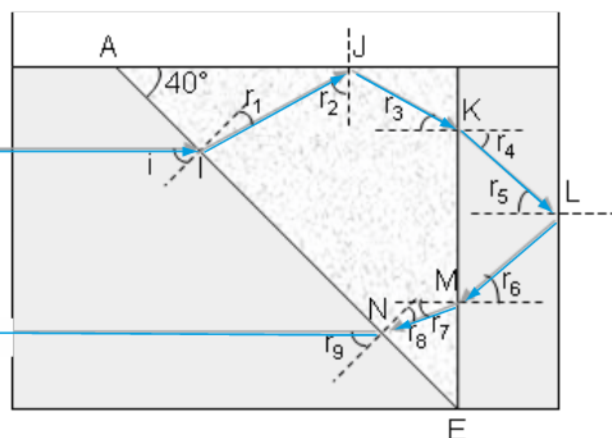


Figure 3.6

3) Le rayon ressort donc de la cuve d'eau par la face où il est entré, parallèlement au rayon incident mais avec une propagation en sens opposé (Figure 3.6).

La fibre optique

Soit une fibre optique classique dont le cœur a un indice $n_1 = 1{,}5$ et la gaine un indice $n_2 = 1{,}3$.
Déterminer les conditions pour qu'un rayon incident se propage dans la fibre et en déduire son ouverture numérique 2α, définie comme l'ouverture maximale du faisceau incident pouvant se propager dans la fibre (Figure 3.7).

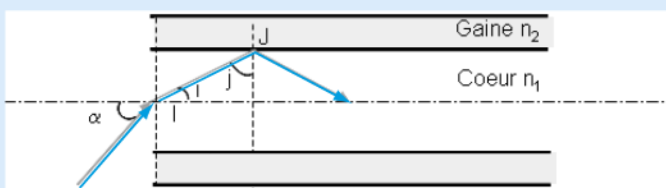


Figure 3.7

Solution

Pour qu'un rayon se propage dans cette fibre, il faut qu'il soit réfracté en I et en condition de réflexion totale en J. Cela impose en J que $n_1 \sin j \geqslant n_2$, soit $j \geqslant j_{\lim}$ avec

$$j_{\lim} = \text{Arcsin}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 60{,}07°.$$

i et j sont toujours reliés par la relation $i + j = 90°$. On peut définir un angle limite $i_{\lim} = 90° - j_{\lim} = 29{,}93°$. En I, il est lié à l'angle α par la loi de Snell-Descartes $\sin\alpha = n_1 \sin i_{\lim}$. On en déduit que l'angle $2\alpha = 96{,}9°$ ce qui correspond à l'angle maximal d'incidence du faisceau pouvant se propager dans la fibre. C'est l'ouverture numérique de la fibre.

Le prisme

FICHE 4

Un prisme classique est un milieu homogène transparent et isotrope, d'indice de réfraction n. Il est limité par deux dioptres plans non parallèles entre eux et appelés les **faces d'entrée** et de **sortie du prisme**. Leur intersection forme l'arête du prisme caractérisée par un angle A. La troisième face du prisme est appelée **la base** : elle est souvent dépolie et diffuse alors les rayons, ce qui la rend inutilisable. On note n' l'indice de réfraction du milieu extérieur au prisme. Si ce milieu est de l'air, $n' = 1$.
On appelle le plan d'incidence celui formé par le rayon incident et la normale à la face d'entrée du prisme au point d'incidence I. D'après les lois de Snell-Descartes (voir fiche 2), le rayon incident reste dans ce plan, même après avoir traversé le prisme.
Le prisme est donc toujours représenté en coupe dans le plan d'incidence (Figure 4.1).

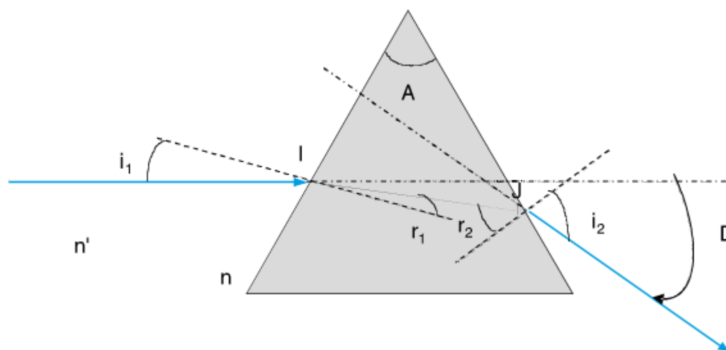


Figure 4.1

1 Formules du prisme

Un rayon incident sur un prisme d'angle A est généralement réfracté par la face d'entrée du prisme puis par la face de sortie (Figure 4.1). On définit i_1 et r_1, les angles d'incidence et de réfraction sur la face d'entrée du prisme, ainsi que r_2 et i_2, les angles d'incidence et de réfraction sur la face de sortie du prisme. Ces 4 angles sont reliés par les trois formules suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} n' \sin i_1 = n \sin r_1 \\ r_1 + r_2 = A \\ n' \sin i_2 = n \sin r_2 \end{array}}$$

II Déviation du prisme

Après la traversée d'un prisme, un rayon incident subit toujours une déviation repérée par un angle orienté appelé D. C'est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon sortant du prisme. Pour le prisme de la Figure 4.1 : $D = i_1 + i_2 - A$. D est ici en valeur absolue. En fait, l'angle D est négatif car il est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le rayon sortant du prisme d'angle A et la déviation D n'existent que si : $\sin\left(\frac{A}{2}\right) < \frac{n'}{n}$.

III Le minimum de déviation

Lorsque i_1 augmente, l'angle de déviation D est, dans un premier temps, une fonction décroissante de l'angle d'incidence i_1. Puis il devient une fonction croissante après être passé par une valeur minimale D_m qui marque un minimum de déviation du rayon sortant du prisme. Au minimum de déviation, les formules du prisme deviennent :

$$\boxed{\begin{aligned} i_1 &= i_2 = i \\ r_1 &= r_2 = r = \frac{A}{2} \\ D_m &= 2i - A \end{aligned}}$$

Pour un prisme de petit angle A ($A < 20°$), $n'i = nr$ (loi de Kepler) ; la déviation D reste égale à sa valeur minimale

$$\boxed{D = D_m = \left(\frac{n}{n'} - 1\right) A}.$$

La traversée d'un prisme de glace

Soit un prisme de glace d'angle A et d'indice de réfraction $n = 1{,}33$.
Que vaut cet angle si la lumière émerge par sa face de sortie ?

Solution

Pour qu'un rayon émerge par la face de sortie du prisme, l'angle d'incidence r_2 sur la deuxième face ne doit pas dépasser l'angle limite $r_{2\text{lim}} = \text{Arcsin}(n'/n)$. Avec $n' = 1$ et $n = 1{,}5$, $r_{2\text{lim}} = 48{,}75°$.

De même, la valeur maximale de l'angle de réfraction sur la face d'entrée du prisme, r_1, est telle que $r_{1\text{lim}} = r_{2\text{lim}} = 48{,}75°$ (principe du retour inverse de la lumière). Cela correspond à une incidence rasante sur la face d'entrée du prisme. Comme l'angle au sommet du prisme $A = r_1 + r_2$, sa valeur limite est donnée par $A_{\text{lim}} = r_{1\text{lim}} + r_{2\text{lim}} = 2r_{1\text{lim}} = 97{,}5°$. On peut écrire que $A < A_{\text{lim}}$ avec $A_{\text{lim}} = 2\ \text{Arcsin}\,\frac{n'}{n}$, ce qui revient à dire que $\sin\frac{A_{\text{lim}}}{2} < \frac{n'}{n}$.
C'est la condition d'émergence d'un rayon par la deuxième face d'un prisme.

Réflexion en sortie du prisme

Un rayon se propageant dans l'air est incident sur un prisme équilatéral d'angle A et d'indice $n = 1{,}5$; il sort par sa base qui n'est pas dépolie (Figure 4.2).

1) Quelle est la condition pour que le rayon se réfléchisse totalement en J ?

2) Que vaut alors l'angle de sortie du rayon par la base repéré par l'angle j ?

3) Exprimer l'angle de déviation D du rayon sortant en fonction de i et A.

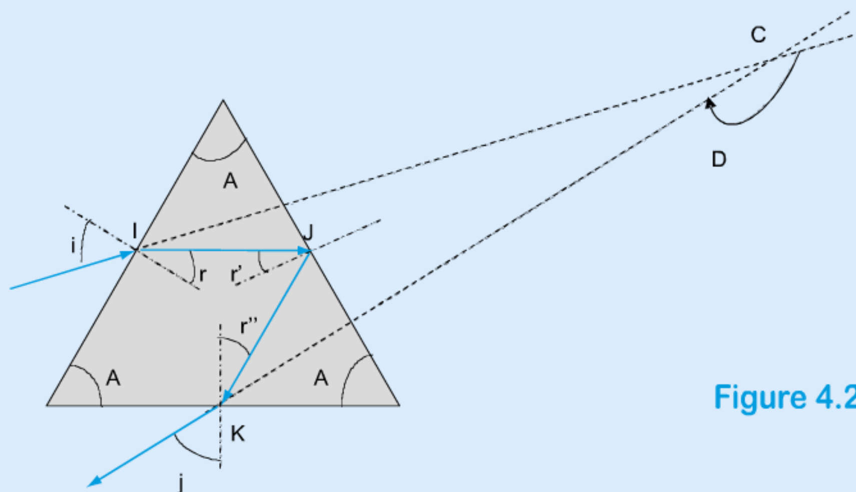


Figure 4.2

Solution

1) Soit r'_{lim}, l'angle d'incidence en J à partir duquel il y a effectivement une réflexion totale en J. Il est donné par $\sin r'_{\text{lim}} = \dfrac{1}{n}$ car $n' = 1$. Pour que le rayon se réfléchisse totalement en J, il faut que $r' \geqslant r'_{\text{lim}}$. Comme $r' = A - r$, cela entraîne que $r \leqslant A - r'_{\text{lim}}$ et comme $\sin i = n \sin r$ alors $\sin i \leqslant n \sin(A - r'_{\text{lim}})$. On rappelle que $n \sin(A - r'_{\text{lim}}) = n[\sin A \cos r'_{\text{lim}} - \sin r'_{\text{lim}} \cos A]$ et que $\sin r'_{\text{lim}} = \dfrac{1}{n}$, on a donc : $n \sin(A - r'_{\text{lim}}) = n\left[\sin A\sqrt{1 - \sin^2 r'_{\text{lim}}} - \sin r'_{\text{lim}} \cos A\right] = \sin A\sqrt{n^2 - 1} - \cos A$; il y a donc réflexion totale en J si $\sin i \leqslant \sqrt{n^2 - 1}\sin A - \cos A$.

2) Après réflexion totale en J, les angles dans le prisme sont reliés par la relation : $A = r' + r = r' + r''$, ce qui permet que $r'' = r$ et $j = i$.

3) Dans le quadrilatère $CIJK$ de la Figure 4.2, $360° = 2(i - r) + (360° - 2r') + (180° - D)$; comme $r + r' = A$, $D = 180° + 2(i - A)$. D'après la figure 4.2 la déviation d'un rayon qui sort par la base d'un prisme après réflexion sur sa deuxième face est orientée dans le sens des aiguilles d'une montre ; elle est donc négative.

Les poissons luminescents

Certains poissons des profondeurs ont un organe qui guide la lumière. Si la surface interne de ce guide réfléchit totalement la lumière, sa face externe est semi-réfléchissante de sorte qu'une fraction de la lumière seulement y est réfléchie. L'ensemble peut être assimilé au prisme représenté Figure 4.3.
Pourquoi ces poissons émettent-t-ils dans le visible ?

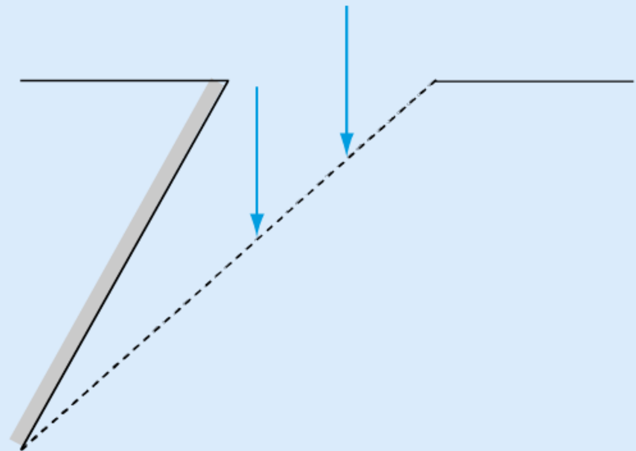


Figure 4.3

Solution

Pour expliquer que les poissons luminescents émettent de la lumière visible il faut considérer le trajet des rayons lumineux qui se propagent dans leurs organes représenté Figure 4.4. Elle montre qu'il y a réflexion totale sur la face interne du prisme et réflexion partielle sur la face externe. La réflexion partielle implique l'existence de rayons réfractés dans le poisson qui en font une source de lumière visible.

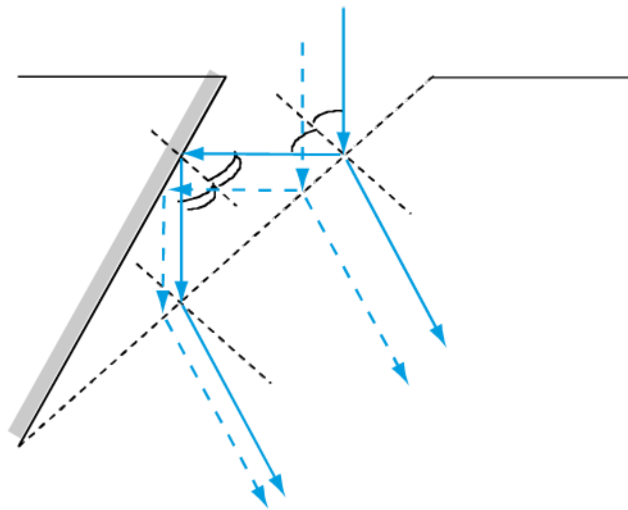


Figure 4.4

FICHE 5

Détermination de l'indice d'un milieu par la méthode du prisme

Pour mesurer l'indice de réfraction n d'un matériau solide, une méthode classique est de tailler ce dernier sous la forme d'un prisme d'angle A. Nous ne considérons ici que les milieux solides, homogènes, transparents et isotropes.

I Le montage

Le prisme est placé sur une platine tournante, appelée goniomètre, graduée sur 360 degrés avec une précision qui peut être inférieure à plusieurs minutes (Figure 5.1).
On étudie le rayon réfracté par la deuxième face du prisme au moyen d'un viseur où l'on regarde soit directement avec son œil si la source n'est pas trop intense, soit par le biais d'une caméra.
Si l'on ne recherche qu'une valeur indicative de l'indice, on éclaire le prisme avec une source monochromatique en utilisant un collimateur.
Cependant, l'utilisation d'une source polychromatique permet de déterminer la valeur de l'indice de réfraction du matériau, étudié en fonction de la longueur d'onde ; on obtient ainsi la courbe de dispersion $n(\lambda)$ de l'indice.

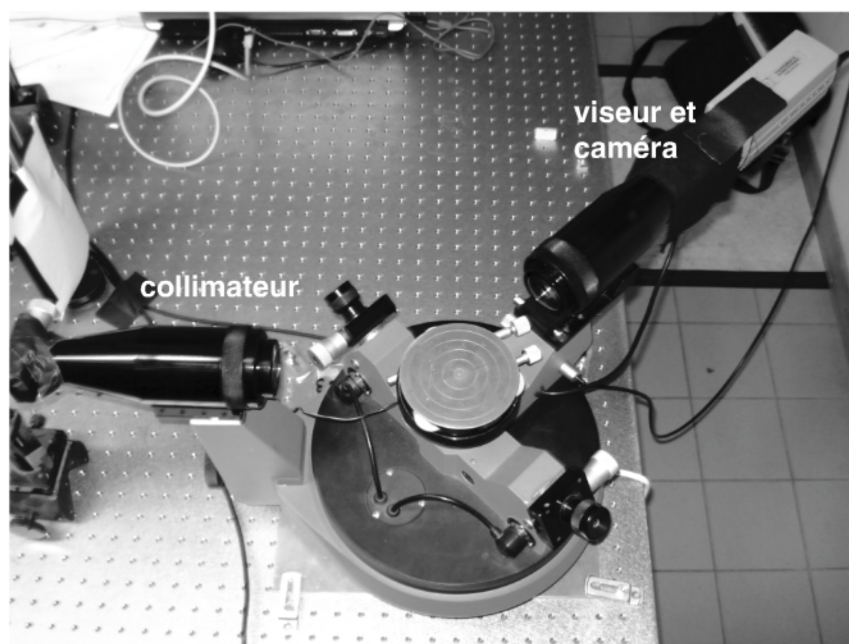


Figure 5.1

II Le principe de la mesure

Il convient tout d'abord de mesurer l'angle A ; pour cela, le prisme est éclairé en incidence normale sur la face d'entrée puis de sortie du prisme afin de repérer sur la graduation de la platine tournante l'angle entre ces deux normales. Il est égal à $\pi - A$.

- Pour mesurer l'indice de réfraction d'un matériau, on commence par rechercher le minimum de déviation à travers un prisme taillé dans ce matériau. Pour cela, il suffit de suivre sur un écran la position du faisceau sortant après réfraction par les faces d'entrée et de sortie et de repérer le minimum de sa déviation en faisant tourner le prisme sur la platine.
- Pour chaque longueur d'onde, et grâce à la graduation de la platine tournante, on peut mesurer directement la valeur du minimum de déviation par rapport à la normale à la face de sortie du prisme, D_m. Au minimum de déviation, on a :

$$n(\lambda) = \frac{\sin\left(\dfrac{D_m(\lambda) + A}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)}$$

L'indice de réfraction peut être déterminé avec une précision inférieure ou égale à 10^{-4} dans le visible.

III Du minimum de déviation à l'indice de réfraction

Le Tableau 5.1 et la Figure 5.2 présentent un exemple de mesures obtenues sur un prisme d'angle $A = 45°$, taillé dans un matériau solide dont on a souhaité déterminer la dispersion en longueur d'onde de l'indice dans le visible.

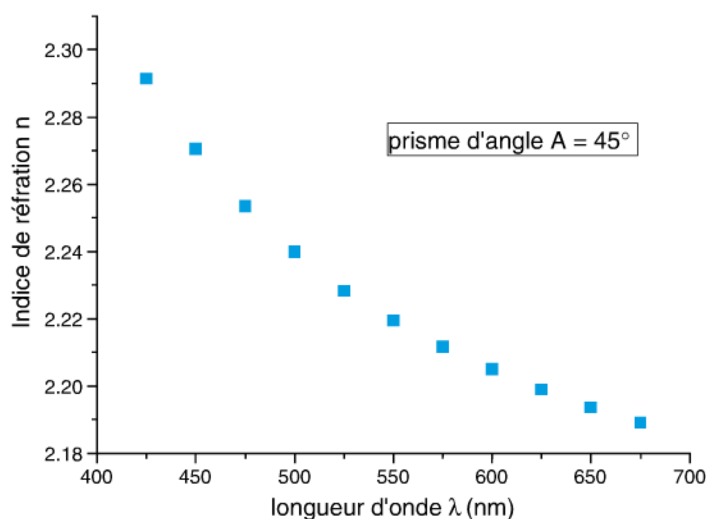


Figure 5.2

Tableau 5.1

Longueur d'onde λ (nm)	Angle du minimum de déviation D_m (degré)	Indice de réfraction n
425 (bleu)	77,54	2,2914
450	75,65	2,2704
475	74,16	2,2534
500	73,00	2,2399
525	72,02	2,2283
550	71,29	2,2195
575	70,63	2,2116
600	70,08	2,2049
625	69,60	2,1990
650	69,17	2,1937
675 (rouge)	68,80	2,1891

La lumière rouge est-elle moins déviée que la bleue ?

Soit un prisme d'indice de réfraction n, éclairé en lumière blanche. Que se passe-t-il à la sortie du prisme ? Quelles sont les couleurs la moins déviée et la plus déviée ?

Solution

Si l'on se réfère au tableau 5.1, il est clair qu'au minimum de déviation, chaque longueur d'onde est déviée différemment ; comme $n_{\text{bleu}} > n_{\text{rouge}}$, la lumière rouge sera moins déviée que la bleue au minimum de déviation et $D_m^{\text{rouge}} < D_m^{\text{bleu}}$.

Qu'en est-il en dehors du minimum de déviation ? Considérons la réfraction d'un rayon incident sur la face d'entrée du prisme. Si le rayonnement est une source de lumière blanche, donc polychromatique, l'indice de réfraction n du prisme dépend de la longueur d'on-

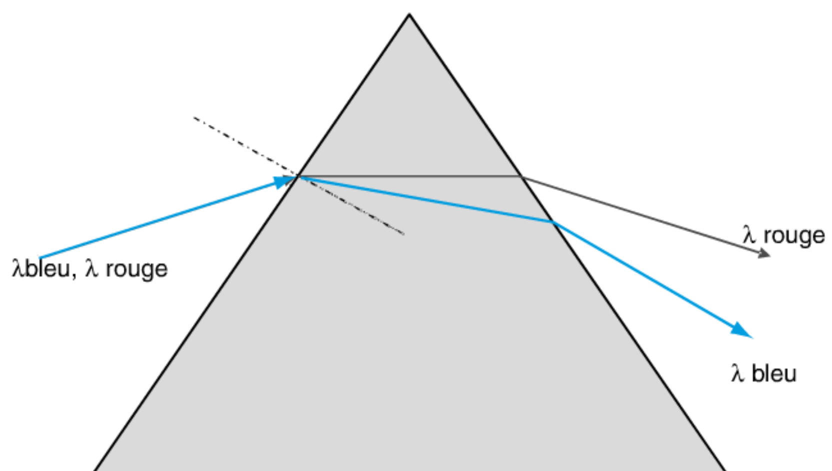


Figure 5.3

de et n'est donc pas le même pour toutes les composantes du spectre de la source. Par conséquent, l'angle de réfraction après la face d'entrée du prisme est différent pour toutes les longueurs d'onde incidentes (Figure 5.3) : il augmente quand la longueur d'onde augmente. Dans ce cas, ces longueurs d'onde vont toutes avoir un point d'incidence différent sur la face de sortie du prisme. En particulier, le point d'incidence se déplace vers la base quand la longueur d'onde diminue et la déviation diminue. Finalement, comme au minimum de déviation, le rayon rouge de la source blanche, de longueur d'onde plus élevée, va être le moins dévié et le rayon bleu le plus dévié (Figure 5.3).

Dépouillement de mesures sur prisme

Maxime place un prisme d'indice n inconnu sur la platine de rotation d'un goniomètre. Il compte déterminer la dispersion en longueur d'onde de l'indice n avec une source polychromatique émettant dans le visible dont il connaît 11 longueurs d'onde. Il règle le prisme de telle manière que le faisceau lumineux traverse successivement deux faces du prisme séparées d'un angle A.

1) L'enseignant réalise pour Maxime une mesure préliminaire dont il ne donne pas les détails, mais qui permet de repérer sur le goniomètre la position des normales aux deux faces du prisme. Il réalise alors le schéma de la Figure 5.4. En déduire la valeur de l'angle A du prisme étudié.

2) Les onze longueurs d'onde émises par la source polychromatique sont reportées dans la première colonne du tableau 5.2. Pour chacune d'entre elles, Maxime repère soigneusement sur le goniomètre la position pour laquelle le faisceau de rayons parallèles qui a traversé le prisme passe par un minimum de déviation. Il reporte ces mesures dans la deuxième colonne du tableau 5.2. Déduire, pour chacune des 11 longueurs d'onde de la source polychromatique, l'angle D_m, ainsi que la valeur de l'indice de réfraction n à 10^{-4} près.

3) Tracer la courbe de dispersion en longueur d'onde de l'indice de réfraction $n(\lambda)$ du prisme.

4) Déterminer la formule analytique qui permet de calculer l'erreur absolue sur n en fonction de celle sur l'angle A et sur l'angle du minimum de déviation D_m.

A.N. $\Delta A = \Delta D_m = 0{,}01°$ et $\lambda = 500$ nm.

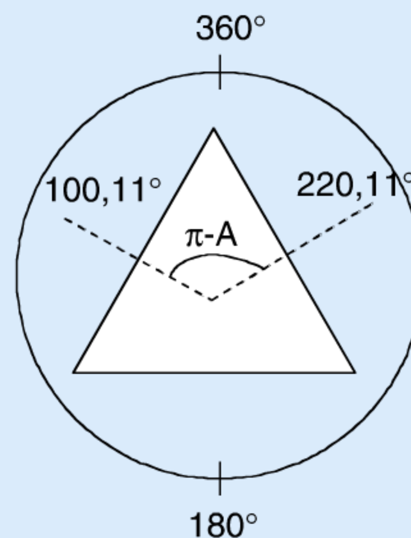


Figure 5.4

Tableau 5.2

Longueur d'onde λ (nm)	Angle du minimum de déviation (degré) repéré sur le goniomètre
425 (bleu)	308,47
450	305,83
475	303,84
500	302,29
525	301,06
550	300,09
575	299,28
600	298,57
625	297,98
650	297,46
675 (rouge)	299,99

Solution

1) Le schéma de la Figure 5.4 montre que les normales aux faces d'entrée et de sortie du prisme sont respectivement repérées sur le goniomètre par des angles de 100,11° et de 220,11°. L'angle entre ces deux normales vaut donc 220,11° – 100,11° = 120°. Or, cet angle est aussi égal à (180° – A) (Figure 5.4). L'angle du prisme étudié est donc A = 60°.

2) Les mesures reportées dans la deuxième colonne du Tableau 5.2 représentent les positions sur le goniomètre du minimum de déviation pour chaque longueur d'onde utilisée. Cependant, cela ne représente pas directement l'angle D_m. En effet, D_m est donné par la différence entre la mesure d'angle donnant la normale à la deuxième face du prisme (220,11°) et celle donnant les positions des minima de déviation (deuxième colonne du tableau 5.2). D_m est donc reporté pour chaque longueur d'onde utilisée dans la deuxième colonne du Tableau 5.3 après avoir retranché 220,11° à tous les angles mesurés par Maxime.

3) La troisième colonne du Tableau 5.3 donne les valeurs de l'indice de réfraction n déterminées, pour les onze longueurs d'onde utilisées, à partir de la formule

$$n(\lambda) = \frac{\sin\left(\dfrac{D_m(\lambda) + A}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)}$$

avec A = 60° et les valeurs de D_m du tableau 5.3. La Figure 5.5 donne la courbe de dispersion $n(\lambda)$ du prisme.

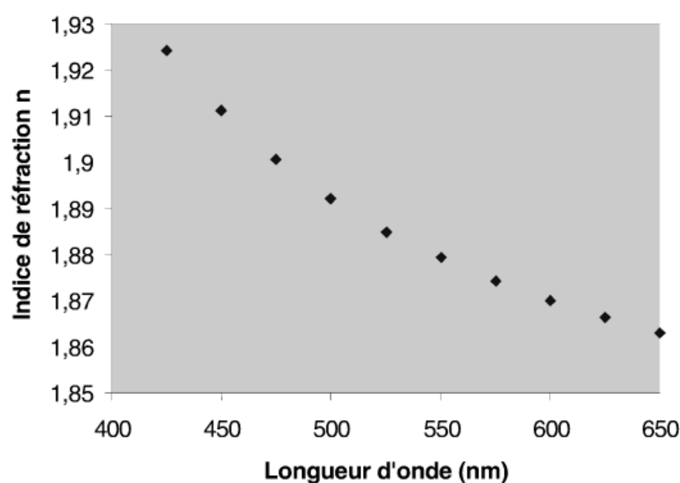


Figure 5.5

Tableau 5.3

Longueur d'onde λ (nm)	D_m (degré)	Indice du prisme n
425 (bleu)	88,36	1,924
450	85,72	1,911
475	83,73	1,900
500	82,18	1,892
525	80,95	1,885
550	79,98	1,879
575	79,17	1,874
600	78,46	1,870
625	77,87	1,866
650	77,35	1,863
675 (rouge)	76,88	1,860

4) Pour calculer l'erreur sur n, on peut utiliser la méthode des différentielles ; on travaille sur le logarithme de l'expression : $n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)}$. On écrit alors que :

$\ln n = \ln\left(\sin\dfrac{(A+D_m)}{2}\right) - \ln\left(\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\right)$; la différentielle logarithmique, repérée par la lettre d, s'écrit : $d(\ln u) = \dfrac{du}{u}$. On a donc $\dfrac{dn}{n} = \dfrac{d\left[\sin\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right)\right]}{\sin\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right)} - \dfrac{d\left[\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\right]}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)}$

soit $\dfrac{dn}{n} = d\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right)\left[\dfrac{\cos\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right)}\right] - \dfrac{dA}{2}\left[\dfrac{\cos\left(\dfrac{A}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)}\right]$

ou encore, $\dfrac{dn}{n} = \dfrac{dA}{2}\left[\cot\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\cot\left(\dfrac{A}{2}\right)\right] + \dfrac{dD_m}{2}\left[\cot\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right)\right]$

Finalement, le calcul d'erreur de l'indice de réfraction est donné par la formule analytique suivante :

$$\Delta n = n\left\{\frac{\Delta A}{2}\left[\cot\left(\frac{A+D_m}{2}\right) - \frac{1}{2}\cot\left(\frac{A}{2}\right)\right] + \frac{\Delta D_m}{2}\left[\cot\left(\frac{A+D_m}{2}\right)\right]\right\}$$

A.N. Si $A = 60°$ et $\lambda = 500$ nm, alors $D_m = 82{,}18°$ et $n = 2{,}3395$.

Si de plus $\Delta A = \Delta D_m = 0{,}01° = 1{,}745 * 10^{-4}$ rad, la formule précédente devient $\Delta n = n\Delta A\left|\cot\left(\dfrac{A+D_m}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\cot\left(\dfrac{A}{2}\right)\right|$ et finalement $\Delta n \approx 2 * 10^{-4}$.

FICHE 6 Les « faux-soleils »

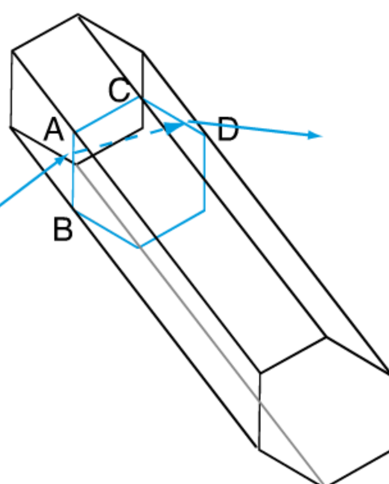
La nature contient des prismes naturels qui conduisent à des phénomènes particuliers. Nous allons étudier ici l'un d'entre eux : les « faux soleils ».

I Comment cela est-il possible ?

Au-dessus de 5000 m d'altitude, l'eau en suspension dans l'air est intégralement composée de cristaux de glace qui forment de petits prismes de base hexagonale. Ils sont épais ou de faible épaisseur ; on les appelle des baguettes. En raison de la pesanteur, leur surface hexagonale est horizontale.

La figure 6.1 présente une coupe de ces cristaux dans le plan d'incidence : ils forment un hexagone régulier dont toutes les faces sont transparentes. Entre deux faces adjacentes, l'angle est de 120°. L'indice des cristaux de glace est $n_{\text{eau}} = 1{,}31$.

Un rayon incident qui rentre par une face *AB* de ces cristaux ne peut pas ressortir par la face adjacente *AC* mais sort par la face suivante *CD*. Ainsi, tout se passe comme s'il se propageait dans un prisme d'angle $A = 60°$ (Figure 6.1).



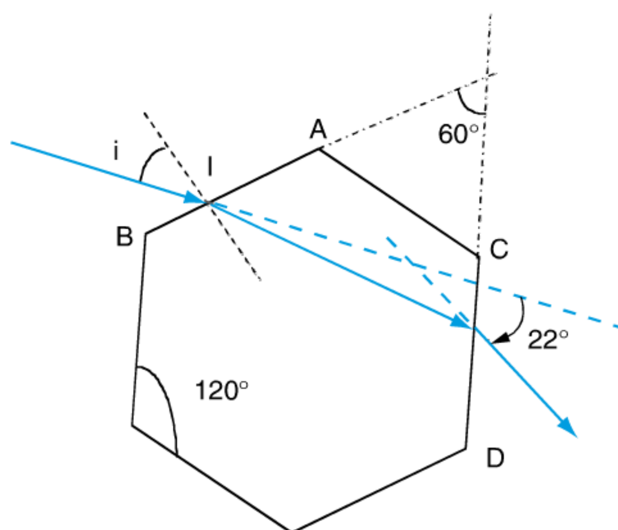


Figure 6.1

II Les « faux soleils »

Les rayons d'angle d'incidence compris entre 30° et 50° subissent quasiment la même déviation à la sortie des prismes. De plus, cette déviation est très proche de sa valeur minimale (de l'ordre de 21,8° pour un prisme d'angle $A = 60°$). Tous les rayons sortant des prismes sont donc réfractés dans la même direction, ce qui crée une accumulation locale de lumière. On a l'impression d'un faux-soleil, appelé aussi **parhélie**.

Tous les cristaux qui se trouvent dans un cône situé à 22° de part et d'autre du Soleil créent cette accumulation de lumière ; deux « faux-soleils » , situés de chaque côté du Soleil, apparaissent donc.

Une analyse des « faux-soleils »

Etudions les « baguettes » à base hexagonale que forment les cristaux de glace dans les nuages au-dessus de 5000 mètres. En coupe, ces cristaux se comportent comme des prismes d'indice $n = 1{,}31$ (Figures 6.2 et 6.3).

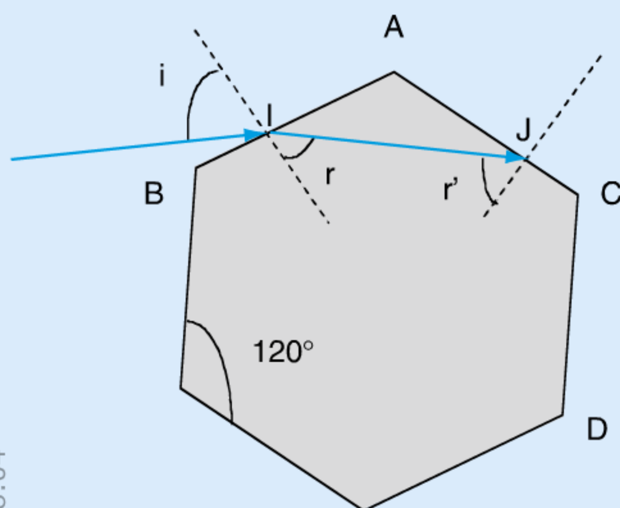


Figure 6.2

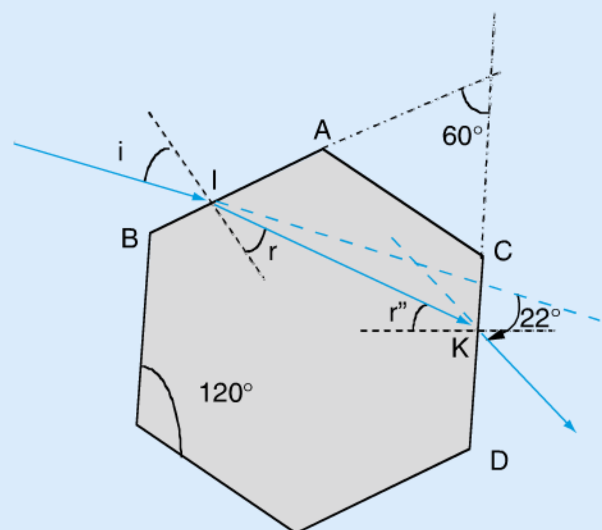


Figure 6.3

1) On suppose qu'un faisceau monochromatique incident en I sur la face AB est réfracté et atteint la face AC en J (cas du prisme d'angle au sommet égal à 120°) (Figure 6.2). Quel est l'angle de réfraction limite en I ? Quel est l'angle d'incidence limite en J ? Pour quelles valeurs de i le faisceau émergent existe-t-il ?

2) On suppose maintenant que le faisceau réfracté en I atteint directement la face CD (cas du prisme d'angle au sommet égal à 60°) (Figure 6.3).

a) Pour quelles valeurs de l'angle i le rayon émergent du prisme par la face CD existe-t-il ?

b) On suppose la condition d'émergence réalisée. Quelles sont les valeurs extrêmes de la déviation D ?

c) Représenter sommairement la fonction $D = f(i)$ pour $i = [0°,90°]$. Commenter cette courbe.
3) Le faisceau incident est maintenant issu du Soleil. C'est donc un faisceau polychromatique.
a) Représenter la marche des rayons à travers le cristal. Comment appelle-t-on ce phénomène ?
b) L'indice de réfraction de la glace dépend de la longueur d'onde selon la loi $n(\lambda) = a + \dfrac{b}{\lambda^2}$, où a et b sont des constantes et λ la longueur d'onde, exprimée en nanomètres (nm). On donne $a = 1{,}3$ et $b = 3025\ \text{nm}^2$. Calculer les déviations $D_{\text{rouge}}(\lambda = 700\ \text{nm})$ et $D_{\text{violet}}(\lambda = 400\ \text{nm})$ pour une incidence de 40°.
4) On assimile un nuage peu épais à un plan P contenant un grand nombre de baguettes dont les axes principaux sont tous parallèles au plan P. Ce nuage est placé entre le soleil S et un observateur O. La normale au plan P est parallèle à la droite (SO). Compte tenu des résultats précédents, expliquer ce que l'on observe depuis le point O dans les deux cas suivants :
a) Les baguettes sont toutes orientées dans la même direction
b) Les baguettes sont orientées aléatoirement.

Solution

1) En I (Figure 6.2), la valeur limite r_{lim} que peut prendre l'angle de réfraction r est donnée par la condition $\sin i_{\text{lim}} = n \sin r_{\text{lim}}$, où $i_{\text{lim}} = 90°$; on trouve $r_{\text{lim}} = \text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 49{,}76°$. Par ailleurs, $A = r + r' = 120°$; en J, l'angle d'incidence r' a donc une valeur limite $r'_{\text{lim}} = A - r_{\text{lim}} = 70{,}24°$ au-delà de laquelle le rayon est réfléchi en J. Pour cette valeur limite de l'angle de réfraction en J, on trouve que $\sin i'_{\text{lim}} = n \sin r'_{\text{lim}} > 1$, ce qui est impossible : si l'angle d'incidence i sur le bloc de glace est quelconque (inférieur à 90°), on a donc $r < r_{\text{lim}}$ et $r' > r'_{\text{lim}}$. Tous les rayons atteignant la face AC en J se réfléchissent donc dans le bloc de glace.
2) a) On est maintenant dans un système équivalent à un prisme d'angle au sommet égal à 60° (Figure 6.3) et on a toujours en I, $i_{\text{lim}} = 90°$ et $r_{\text{lim}} = 49{,}76°$. Notons r'' l'angle du faisceau incident sur la face CD en K. On a $A = 60° = r + r''$ et $r''_{\text{lim}} = 60 - r_{\text{lim}} = 10{,}24°$. Pour que le rayon sorte par la face CD, on doit avoir $r < r_{\text{lim}}$ puis $r'' > r''_{\text{lim}}$, et enfin, $i'' > i''_{\text{lim}}$, avec $i''_{\text{lim}} = \text{Arcsin}(n \sin r''_{\text{lim}}) = 13{,}47°$. Le rayon peut donc sortir du cristal de glace par la face CD après y être rentré par la face AB si $i'' \in [13{,}47°, 90°]$, ce qui peut s'écrire aussi $i \in [90°, 13{,}47°]$ (principe de retour inverse de la lumière).
b) La déviation $D = i + i'' - A = i + i'' - 60°$. Nous allons la calculer pour les deux valeurs extrêmes de i définies ci-dessus. Si $i = 13{,}47°$, $i'' = 90°$ et $D = 43{,}47°$. Si

$i = 90°$, $i'' = 13{,}47°$ et $D = 43{,}47°$. La déviation D atteint donc dans le deux cas une valeur maximale : $D_{\max} = 43{,}47°$. Par ailleurs, sa valeur minimale est donnée par $r = r'' = \dfrac{A}{2} = 30°$ et $\sin i = 1{,}31 \sin \dfrac{A}{2}$, soit $i = i_m = 40{,}92°$. On en déduit que $D_m = 2i_m - 60° = 21{,}84°$.

c) La Figure 6.4 représente l'évolution de D en fonction de i sachant que $i \in [13{,}47°\,; 90°]$. Il y aura une accumulation de lumière pour $i \cong im$, c'est-à-dire pour $D = D_m = 21{,}84°$; on retrouve le fait que $D \in [21{,}84;\, 43{,}47°]$.

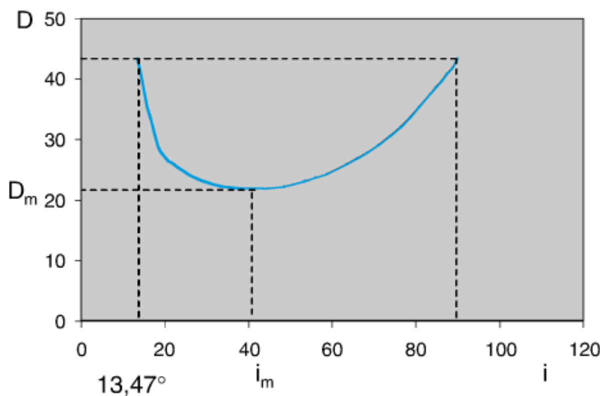


Figure 6.4

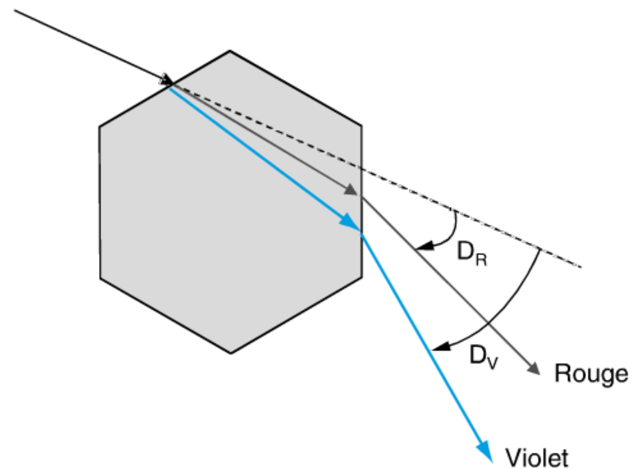


Figure 6.5

3) a) C'est le phénomène de dispersion à travers le prisme d'angle $A = 60°$ (Figure 6.5)

b) En appliquant successivement les formules du prisme, on trouve les valeurs indiquées dans le tableau : avec $i = 40°$, $A = 60°$, $\sin i = n \sin r$, $r + r' = A$, $n \sin r' = \sin i'$ et $D = i + i' - A$.

	n	*r* (degrés)	*r'* (degrés)	*i'* (degrés)	*D* (degrés)
Rouge	1,3062	29,48	30,52	41,55	21,55
Violet	1,3189	29,17	30,83	42,53	22,53

4) a) Si les baguettes sont toutes orientées dans la même direction, les différents rayons lumineux rencontrent des prismes d'angle au sommet égal à 60°. Ils sont donc dispersés mais ne subissent qu'une réfraction (Figure 6.6). C'est la situation traitée au c) de la 2ème question.

b) Si au contraire les orientations varient, on observe simultanément les deux situations de la question 2. Les réflexions totales à l'intérieur des baguettes sont possibles dans certains cas et le minimum de déviation observé à 22° donne naissance à un grand cercle irisé autour du Soleil, appelé le petit halo (Figure 6.7).

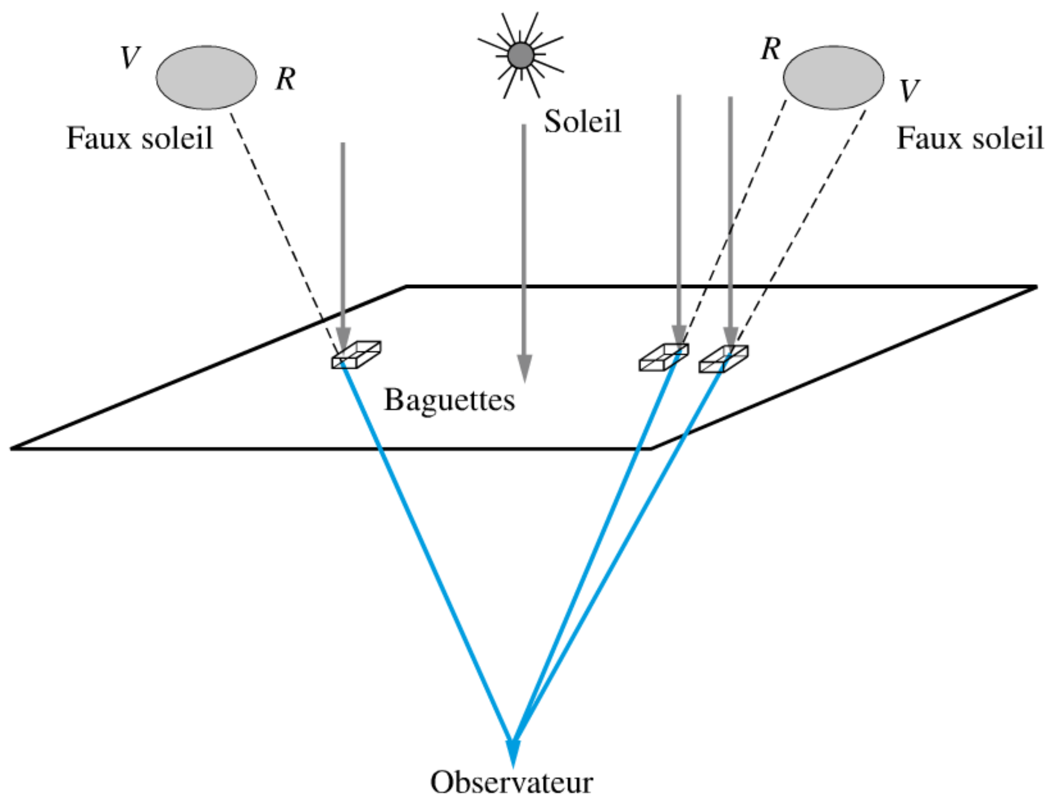


Figure 6.6

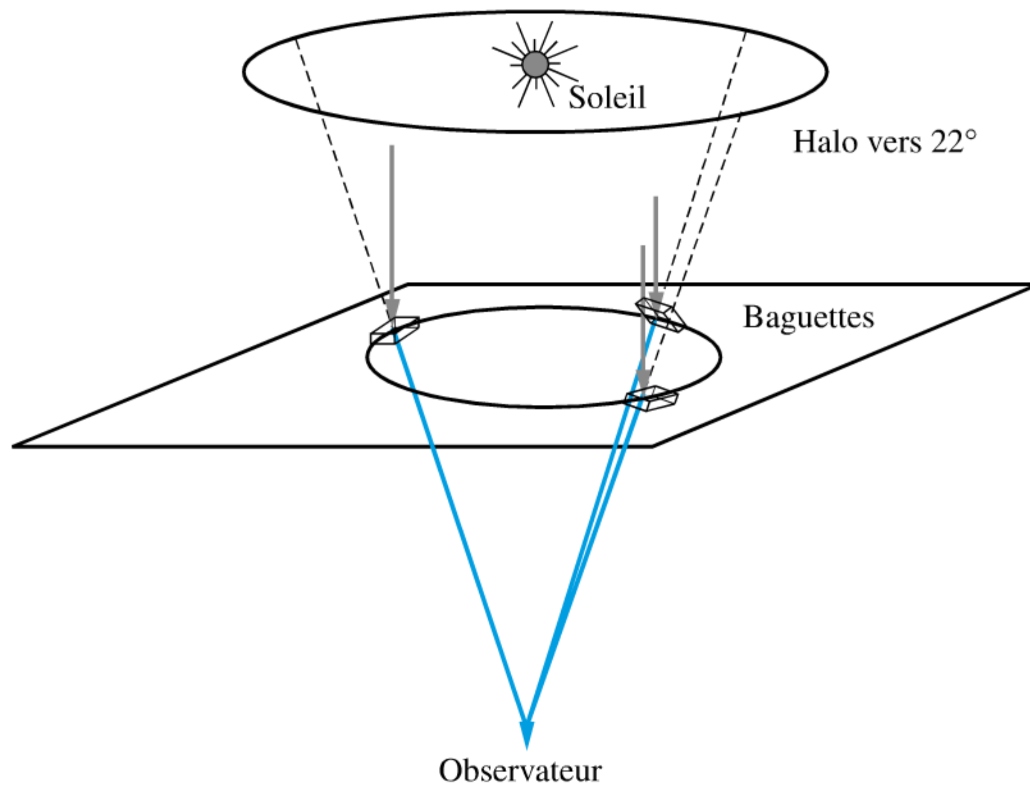


Figure 6.7

L'arc-en-ciel

FICHE 7

I Conditions d'observation

Quand la lumière du Soleil tombe sur des gouttes de pluie en suspension dans l'air, un observateur tournant le dos au Soleil peut voir un ou plusieurs arcs concentriques présentant les couleurs visibles du spectre solaire.
Cette situation est possible quand une averse est accompagnée ou suivie immédiatement d'une éclaircie. On peut aussi l'observer près de chutes d'eau (comme les chutes du Niagara aux USA), dans les embruns des vagues ou dans un jet d'eau.

II Le rôle primordial des gouttes de pluie

René Descartes a été la première personne à donner en 1637 une explication satisfaisante du phénomène de l'arc-en-ciel : lorsque la lumière traverse les gouttes d'eau, les rayons incidents subissent une ou deux réflexions sur la paroi interne de la goutte avant d'en ressortir (Figure 7.1). Trente ans plus tard, Isaac Newton présente la lumière blanche comme un spectre, dispersé par la réfraction des rayons par les gouttes d'eau. Celles-ci sont donc équivalentes à des prismes qui réfractent et dévient les rayons lumineux de manière différente selon leur longueur d'onde ; par ailleurs, la déviation de ces rayons passe par un minimum.
Les rayons incidents dans une goutte de pluie se retrouvent concentrés de part et d'autre du minimum de déviation. Ce dernier correspond au parcours du rayon 7 indiqué sur la figure 7.1 ; c'est le rayon de Descartes. Il y a alors, dans cette direction, une concentration de la lumière visible dont les couleurs sont dispersées : c'est le phénomène de l'arc-en-ciel.
Si les rayons incidents ne subissent qu'une réflexion sur la paroi interne des gouttes de pluie, ils engendrent l'arc primaire de l'arc-en-ciel. Après deux réflexions, ils engendrent l'arc secondaire, nettement moins intense ; l'ordre d'apparition des couleurs y est inversé par rapport à celui de l'arc primaire.

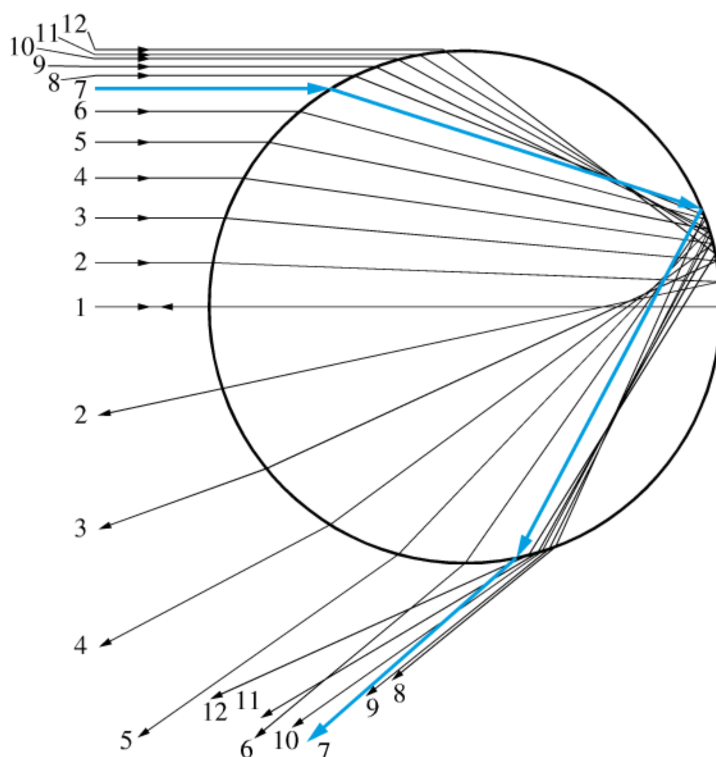


Figure 7.1

L'arc-en-ciel ? Mais comment ça marche ?

Un faisceau de rayons parallèles monochromatiques éclaire dans l'air une sphère d'eau d'indice $n = 4/3$ (Figure 7.2). Les rayons pénètrent dans la sphère au point I_0 sous une incidence i.

1) a) Exprimer r' en fonction de r et i' en fonction de i.

b) Quel est l'angle de réfraction limite en I_0 ? Montrer que le faisceau émergent existe toujours.

c) Déterminer la déviation D_0 du rayon émergent en fonction de i et de r.

d) Une partie du faisceau est réfléchie en I_1 et sort de la sphère en un point I_2. Représenter le trajet de ce faisceau. Quelle est la nouvelle déviation D_1 ? En déduire l'expression de la déviation D_p après p réflexions à l'intérieur de la sphère.

e) On cherche à étudier la variation de D_1 en fonction de i. Calculer D_1 pour $i = 0°,\ 30°,\ 60°,\ 90°$. Tracer $D_1(i)$. Que constatez-vous ?

2) Le faisceau lumineux incident est maintenant de la lumière blanche (lumière du Soleil).

a) Que voit un observateur placé dans la direction du faisceau émer-

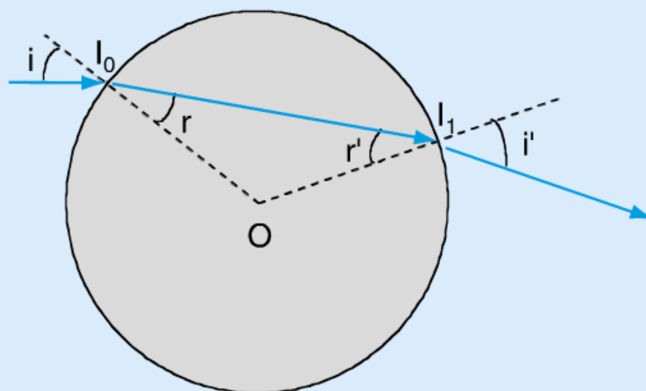


Figure 7.2

gent en I_1. Représenter graphiquement la marche du faisceau formé par les différents rayons.
b) L'indice de l'eau varie de $n_R = 1{,}329$ à $n_V = 1{,}343$ entre les extrémités rouge et violette du spectre visible. Calculer la quantité $\Delta D_0 = D_0(\text{violet}) - D_0(\text{rouge})$ et $\Delta D_1 = D_1(\text{violet}) - D_1(\text{rouge})$ pour un angle d'incidence de 60°.
c) A quel phénomène physique correspond l'ensemble de ce problème ? Que représentent en particulier les faisceaux émergents en I_2 et I_3 ? Commenter les résultats.

Solution

1) a) Considérons le triangle OI_0I_1 : deux de ses côtés sont des rayons du cercle. Il est donc isocèle. Ceci implique $r = r'$ et $i = i'$ (Figure 7.3).

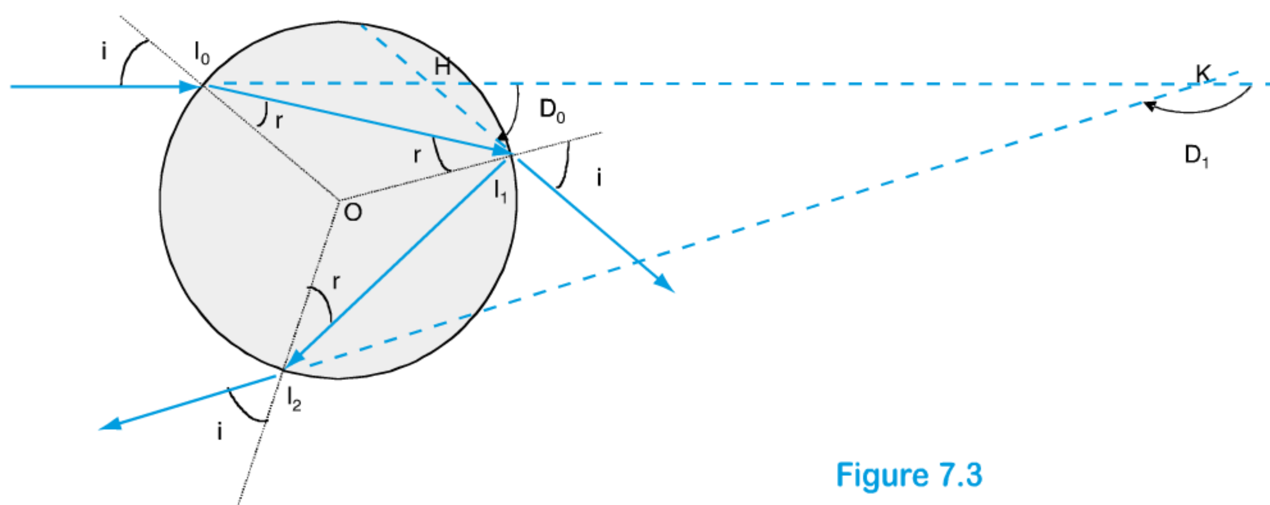


Figure 7.3

b) La relation de Snell-Descartes en I_0 s'écrit $\sin i = n \sin r$. On cherche r_{lim}, qui correspond à $i = 90°$, soit $r_{\text{lim}} = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{n}\right)$; $r_{\text{lim}} = 48{,}59°$ si $n = 4/3$. De plus, comme $i = i'$, le rayon émergent existe toujours et l'angle r_{lim} en I_0 est aussi l'angle de réflexion totale en I_1.

c) Dans le triangle I_0HI_1, on a $(i - r) + (180° - D_0) + (i - r) = 180°$, soit $D_0 = 2(i - r)$. C'est la valeur absolue de l'angle de déviation D_0. Notons que cet angle, orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, est négatif.

d) Le trajet du faisceau qui sort de la goutte en I_2 est représenté Figure 7.3. Dans le quadrilatère I_0OI_2K, on a : $i + 360° - 4r + i + 180° - D_1 = 360°$,
soit $D_1 = 180° + 2i - 4r = 180° - 2r + D_0$.
En généralisant, on obtient, après p réflexions dans la goutte,

$$D_p = D_0 + p(180 - 2r) = 180p + 2i - 2(p + 1)r$$

e) $\sin i = n \sin r$ avec $n = 4/3$ et $D_1 = 180° + 2(i - 2r)$.

i (degrés)	0	30	60	90
r (degrés)	0	22,02	40,50	48,59
D_1 (degrés)	180	151,92	138	165,64

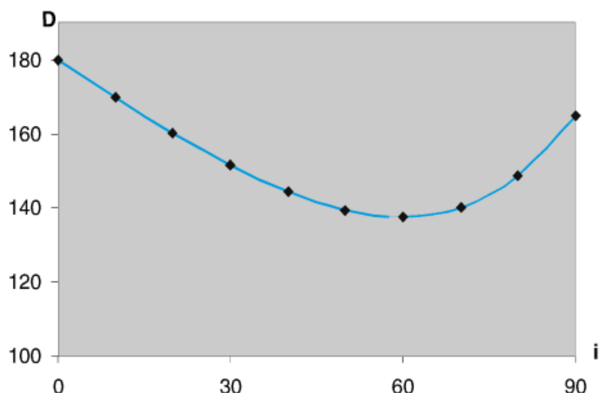


Figure 7.4

La courbe $D_1(i)$ est représentée Figure 7.4. On observe que la déviation est décroissante puis croissante après être passée par un minimum de déviation donné par $\dfrac{dD_I}{dt} = 2 - 4\,\dfrac{dr}{di} = 0$. On en déduit que $\dfrac{dr}{di} = \dfrac{1}{2}$. Or, $\sin i = n \sin r$; en dérivant cette expression par rapport à i on obtient, $\dfrac{dr}{di} = \dfrac{\cos i}{n \cos r} = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{n\sqrt{1 - \sin^2 r}} = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{n^2 - \sin^2 i}$.

Finalement, $\dfrac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{n^2 - \sin^2 i} = \dfrac{1}{2}$ soit $3 \sin^2 i = 4 - n^2$; on a donc, au minimum de déviation, $i = i_m = \text{Arcsin}\left(\sqrt{\dfrac{4}{3} - \dfrac{n^2}{3}}\right) = 59{,}39°$, pour $n = 4/3$. Le faisceau qui sort après une seule réflexion dans la goutte d'eau subit donc une déviation dont le minimum correspond aux conditions suivantes : $i_m = 59{,}39°$, $r_m = \text{Arcsin}\left(\dfrac{\sin i_m}{n}\right) = 40{,}20°$ et $D_{Im} = 180° + 2(i_m - 2r_m) = 137{,}98°$. C'est bien la valeur mesurée sur la courbe $D_I(i)$, représentée figure 7.4.

2) a) L'observateur voit de la lumière décomposée car les rayons de différentes couleurs sont déviés différemment (Figure 7.5).

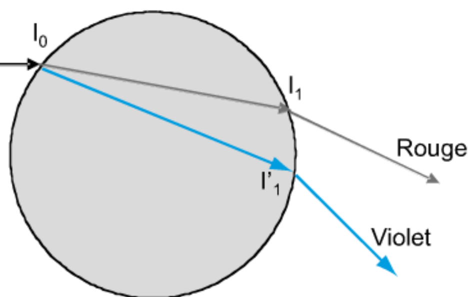


Figure 7.5

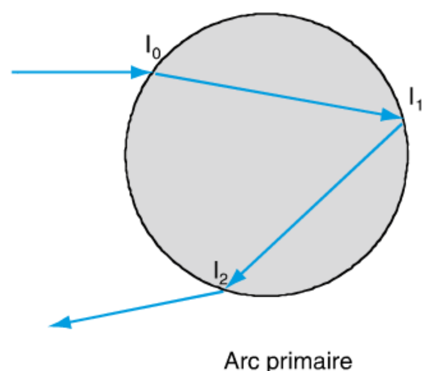


Figure 7.6

b) Dans la suite, l'indice (V) (resp. (R)) concerne toutes les quantités correspondant au rayon violet (resp. rouge). Pour un angle d'incidence i donné, ($i_R = i_V = i$), on peut écrire : $\Delta D_0 = D_{0V} - D_{0R} = 2(r_R - r_V)$
et $\Delta D_I = D_{IV} - D_{IR} = 4(r_R - r_V)$.
Si $i = 60°$, $r_R = 40{,}66°$ et $r_V = 40{,}15°$, soit $\Delta D_0 = 1{,}02°$ et $\Delta D_I = 2{,}04°$.

c) Les faisceaux émergents en I_2 et I_3 sont respectivement l'arc primaire et l'arc secondaire de l'arc-en-ciel (Figures 7.6 à 7.8).

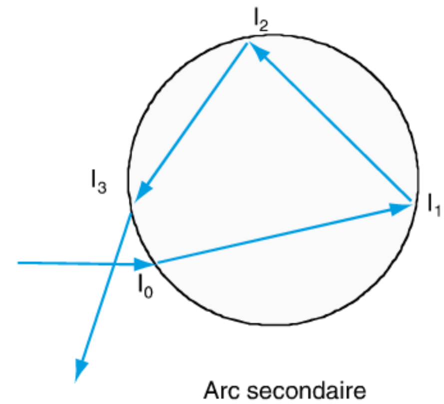


Figure 7.7

Pour observer les arcs primaire et secondaire d'un arc-en-ciel, il faut tourner le dos à la source de lumière, c'est-à-dire au Soleil. Par ailleurs, la figure 7.8 montre que, pour l'observateur, les couleurs de l'arc primaire et de l'arc secondaire sont inversées. Aussi, quand les rayons du Soleil tombent sur les gouttes de pluie en suspension dans l'air, ils sont d'abord réfractés, ce qui engendre une séparation spatiale des longueurs d'ondes du spectre de la lumière blanche : on observe un arc primaire (Figures 7.6 et 7.8). Cependant, les rayons du Soleil se réfléchissent partiellement sur la paroi interne de la goutte, ce qui donne lieu à un arc secondaire dont l'ordre des couleurs est inversé par rapport à l'arc primaire (Figures 7.7 et 7.8). Cet arc secondaire est souvent peu visible car il est beaucoup plus faible. Des arcs successifs, de plus en plus faibles, sont dus à des réflexions supplémentaires sur la paroi interne de la goutte mais sont rarement observables.

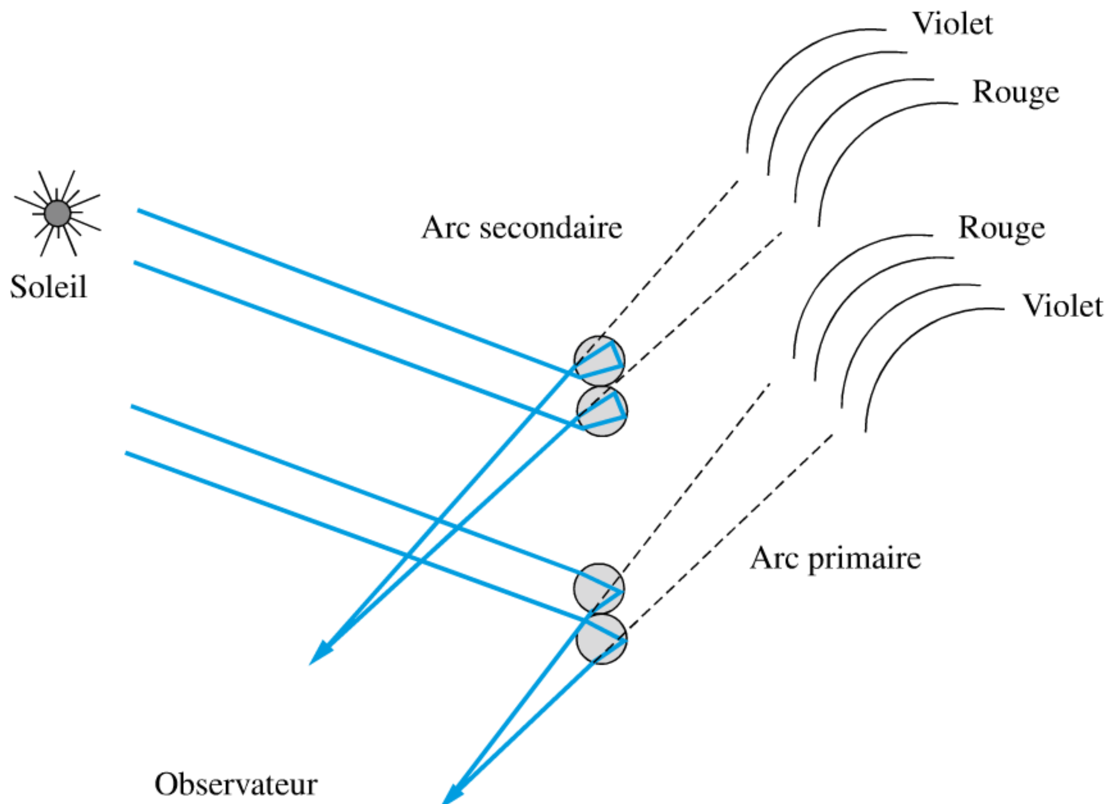


Figure 7.8

FICHE 8

La formation d'images

Considérons de la lumière issue d'un objet. Ce dernier peut être considéré soit comme une source ponctuelle, notée A, soit comme une source étendue notée AB (formée de sources élémentaires qui émettent chacune un rayon). Tous les rayons incidents proviennent de l'objet (Figure 8.1a). L'objet est **dit réel**.

I L'image réelle ou virtuelle

Lors de la traversée d'un système optique, les rayons issus d'un objet réel ponctuel A (ou étendu AB) vont constituer une **image ponctuelle**, notée A' (ou étendue $A'B'$). En optique géométrique, nous étudions le parcours de ces rayons à travers des systèmes optiques simples tels que la lame à faces parallèles, le miroir ou la lentille ; on cherche à déterminer nature, position, sens et taille de l'image ainsi formée.
Ainsi, quand les rayons émis par un objet traversent un système optique simple, ils sont déviés ; cependant, ce sont parfois les prolongements des rayons physiques qui passent par son image. On parle d'**image réelle** lorsque ce sont les rayons physiques issus de l'objet qui se croisent (figure 8.1b). L'image peut alors être visualisée sur un écran. Au contraire, lorsque ce sont les prolongements d'un ou de plusieurs rayons physiques issus de l'objet qui se croisent, on parle d'**image virtuelle** ; cette dernière ne pourra pas être visualisée sur un écran (figures 8.1c et 8.1d).

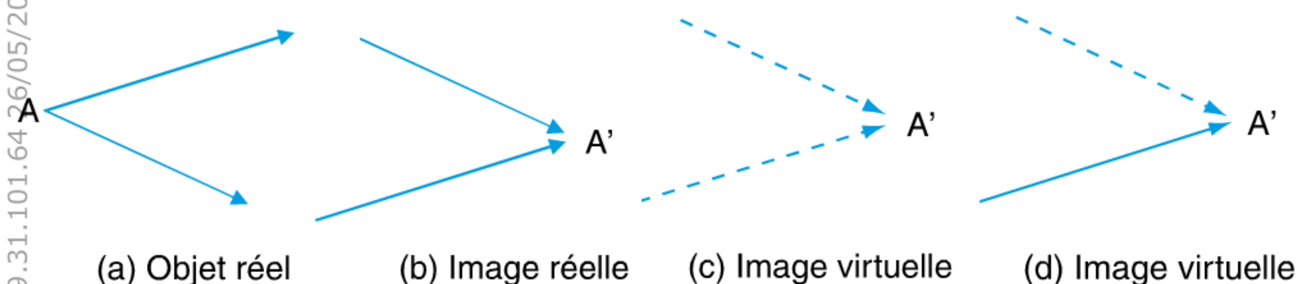


Figure 8.1

II L'objet virtuel

L'objet virtuel n'existe pas en soi mais peut être créé grâce à l'association de deux systèmes simples : l'image formée par le premier système constitue un objet virtuel noté A'', pour le deuxième système, si elle est positionnée derrière lui. En A, se rencontrent alors le prolongement d'au moins un des deux rayons incidents sur le deuxième système (Figure 8.2).



Figure 8.2 Objet virtuel

III Classification des systèmes optiques

On distingue deux types de systèmes optiques :

- Les systèmes dioptriques, constitués de dioptres transparents dans lesquels les rayons ne peuvent subir que de la réfraction.
- Les systèmes catadioptriques qui contiennent au moins un miroir ; les rayons incidents subissent alors au moins une réflexion.

IV L'espace réel et l'espace virtuel

Choisissons par convention un sens de propagation de la lumière de gauche à droite. L'espace « objet réel » est **toujours** situé en avant d'un système et l'espace « objet virtuel » est toujours **situé** en arrière.

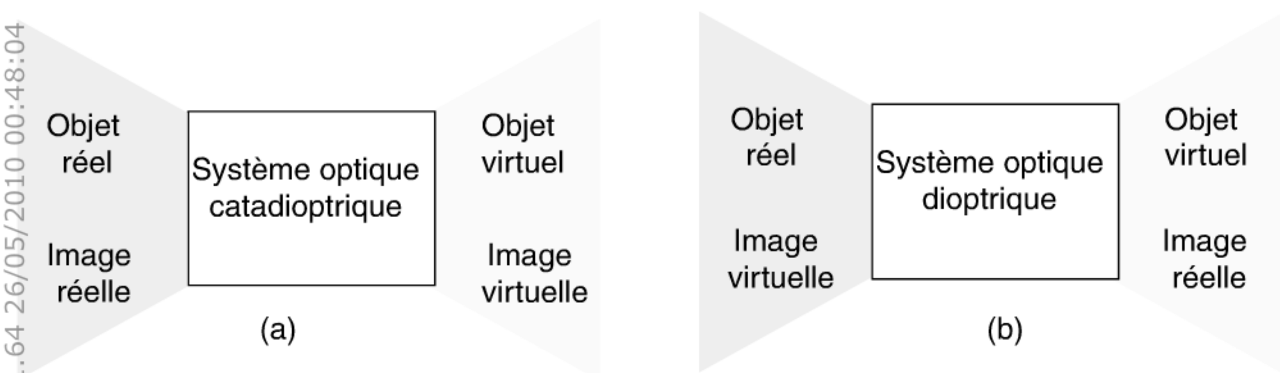


Figure 8.3

La position des espaces « image réelle » et « image virtuelle » dépend de la nature du système. Deux cas sont possibles :

- Pour un système catadioptrique, l'espace « image réelle » est situé à gauche et l'espace « image virtuelle » à droite (Figure 8.3a).

- Pour un système dioptrique, l'espace « image réelle » est situé à droite et l'espace « image virtuelle » à gauche (Figure 8.3b).

V La construction d'images

Pour construire une image à travers un système, on doit choisir au moins deux rayons particuliers issus de l'objet étudié dont on va déterminer le cheminement. Il est recommandé de choisir un rayon qui se propage selon la normale au système étudié car, en vertu du principe de Snell-Descartes, il ne sera pas dévié. Le choix du deuxième rayon est libre pour les dioptres plans et sera précisé pour les autres systèmes.

Images à travers un dioptre plan

1) Quelle est la nature de l'image d'une source ponctuelle à travers un dioptre plan ?
2) Que devient-elle si ce dioptre est réfléchissant ?

Solution

1) Pour construire l'image d'une source ponctuelle à travers un dioptre plan, on considère deux rayons issus de l'objet réel A : un premier rayon passant par l'image traverse le dioptre perpendiculairement et n'est pas dévié (Figure 8.4). Un second rayon subit la loi de la réfraction de Snell-Descartes qui s'écrit $n \sin i = n' \sin r$. Son prolongement rencontre le premier rayon en un point A', image virtuelle de A à travers le dioptre. La figure 8.4 montre le tracé de rayons correspondant dans le cas d'une propagation vers un milieu moins réfringent.

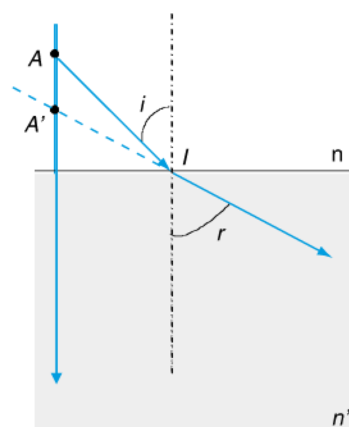


Figure 8.4

2) Dans un miroir plan, le rayon perpendiculaire au miroir issu d'un objet réel ponctuel A revient sur lui-même. Un rayon arrivant avec une incidence i sur le miroir se réfléchit avec un angle $i = j$. Ces deux rayons prolongés se rencontrent derrière le miroir en un point A', image virtuelle de A (Figure 8.5).

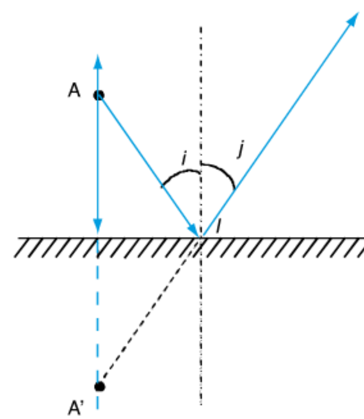


Figure 8.5

Le mirage

En été, sur les routes goudronnées, le sol semble un miroir réfléchissant les voitures qui nous précèdent. Pouvez-vous expliquer ce phénomène ?

Solution

L'été, la température au contact du sol est plus élevée qu'à quelques mètres de hauteur. Cela modifie l'indice de l'air qui diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche du sol. Une manière simple de modéliser l'atmosphère est de considérer qu'elle est constituée de couches d'air successives d'indices différents, augmentant avec l'altitude. Les rayons du Soleil subissent des réfractions successives au fur et à mesure qu'ils se rapprochent du sol ; ils se propagent vers des milieux de plus en plus réfringents et subissent ensuite une réflexion totale près du sol. Pour l'observateur, ces rayons semblent provenir du sol et forment sur le goudron une image du ciel sur laquelle les véhicules se réfléchissent. Cette situation est analogue à celle décrite par la Figure 8.5.

Une cuillère dans un verre d'eau

Pourquoi la partie immergée d'une cuillère dans l'eau semble-t-elle plus grosse ?

Solution

L'indice de l'eau est plus élevé que celui de l'air. Aussi, tout rayon passant de l'eau vers l'air est réfracté et s'écarte de la normale. L'observateur qui reçoit les rayons sortant du verre voit donc l'image de la cuillère plus proche de la surface de l'eau que la cuillère elle-même. Cette situation correspond à celle décrite par la Figure 8.4. La petite cuillère apparaît donc plus grosse dans l'eau.

La réfraction atmosphérique

Quelle conséquence a la réfraction atmosphérique sur la durée du jour ?

Solution

La réfraction atmosphérique incurve « vers le haut » les rayons issus du Soleil. Lorsque le Soleil se lève ou se couche, on a l'impression qu'il est plus haut qu'en réalité. Le diamètre angulaire du Soleil étant de $30' = 0{,}5$ degrés, la réfraction relève son image de $36' = 0{,}6$ degrés et lorsque le Soleil est sous l'horizon, on le voit encore. Finalement, on peut montrer que le cumul de ces deux effets fait gagner environ 5 minutes d'ensoleillement aux équinoxes. La durée du jour est alors supérieure à celle de la nuit (et non égale) contrairement à ce que l'on pourrait penser.

Images dans l'approximation de Gauss

FICHE 9

I Critères de qualité d'un système

On attend d'un système optique qu'il donne une image de bonne qualité, fidèle à la forme de l'objet. Le critère de qualité d'un système repose sur l'absence de défauts, rassemblés sous le terme d'aberrations (astigmatisme, distorsion, aberration sphérique...).
Dans un système optique performant, tous les rayons issus d'un point objet A (ou leur prolongement) convergent après la traversée du système en un seul point image A' : on parle de système stigmatique. De plus, un objet placé dans un plan perpendiculaire à l'axe du système, appelé axe optique, doit avoir une image elle-même perpendiculaire à l'axe optique : le système est alors dit aplanétique.

II L'approximation de Gauss

Pour qu'un système donne des images de bonne qualité, il est préférable de l'utiliser dans l'approximation de Gauss. Cette approximation est valable si les faisceaux issus des objets sont peu ouverts et assimilables à des pinceaux et si les angles d'incidences sont petits. Les rayons incidents sont alors toujours proches de l'axe optique (rayons paraxiaux).

III Images dans l'approximation de Gauss

Après la traversée de chaque système simple, les rayons issus d'un objet vont en constituer une image notée A' (ponctuelle) ou $A'B'$ (étendue). Si, lors de la construction de l'image A' d'un point objet A, nous ne considérons que des rayons paraxiaux (approximation de Gauss), on obtiendra un seul point image A'. On dit que A et A' sont conjugués l'un de l'autre. Dans ces conditions, l'image d'un objet à travers un système simple sera toujours unique. On parle d'image conjuguée de l'objet.

Tous les exercices qui suivent ainsi que ceux des fiches suivantes supposent que l'on se place dans l'approximation de Gauss

Il voit plein de Soleils à travers sa vitre !

Pierre se prélasse au Soleil derrière la vitre d'une fenêtre du château de son oncle. Il apparaît clairement que les deux faces de la vitre, ne sont pas parallèles : elle est équivalente à un prisme de petit angle A. Elle est composée d'un verre d'indice $n = 1{,}5$. Ainsi, Pierre voit des images successives du Soleil de luminosité décroissante dont la position varie avec celle de l'œil.

La figure 9.1 montre le trajet d'un rayon issu du Soleil à travers un tel prisme. Elle montre en particulier les deux premiers rayons qui traversent la vitre prismatique après une puis deux réflexions ; ils sont respectivement déviés d'un angle D' et D''' par rapport au rayon incident.

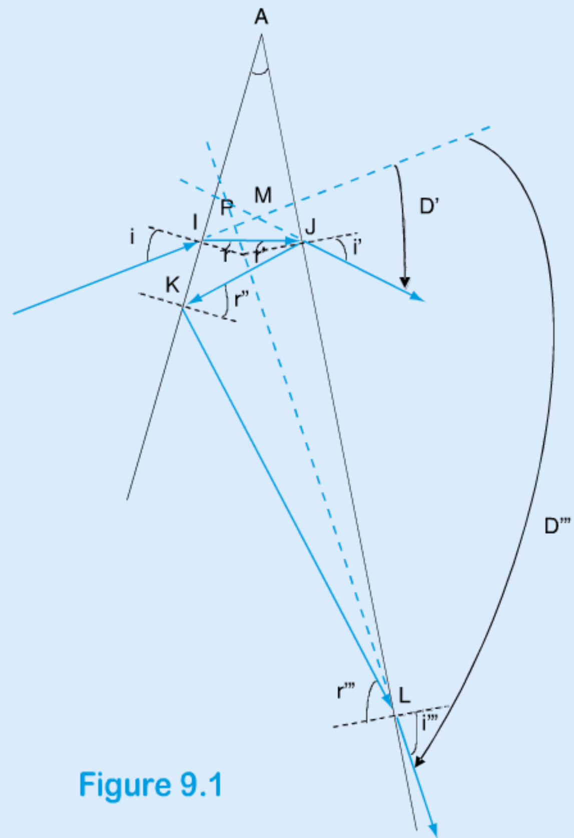


Figure 9.1

1) Donner les expressions de r', r'' et r''' en fonction de l'angle A et de r.

2) Démontrer que $D' = i + i' - A$ et que $D''' = i + i''' - A$.

3) Donner l'expression de l'écart $D''' - D'$ dans l'approximation des petits angles.

4) Quelle est cet écart si $A = 10'$ et $n = 1{,}5$?

Solution

1) On peut écrire successivement :

- dans le triangle IAJ : $r + r' = A$, d'où $r' = A - r$.
- dans le triangle AJK : $A + \left(\frac{\pi}{2} + r'\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r''\right) = \pi$,

  d'où $r'' = A + r' = 2A - r$.
- dans le triangle AKL : $A + \left(\frac{\pi}{2} + r''\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'''\right) = \pi$,

  d'où $r''' = A + r'' = 3A - r$.

2) Dans le triangle IJM : $(i - r) + (i' - r') + (\pi - D') = \pi$, d'où $D' = i + i' - A$.

Dans le quadrilatère $AIPL$, $A + \left(\frac{\pi}{2} - i\right) + (\pi + D''') + \left(\frac{\pi}{2} - i'''\right) = 2\pi$,

d'où $D''' = i''' + i - A$.

3) Dans le cadre de l'approximation des petits angles, $i = nr$, $i' = nr'$, $i''' = nr'''$. On peut donc écrire

$$D''' = nr''' + nr - A = n(3A - r)A + nr - A = (3n - 1)A$$

$$D' = nr' + nr - A = (A - r) + nr - A = (n - 1)A\,.$$

Finalement $D''' - D' = 2nA$.

4) L'application numérique donne $2nA = 30'$, ce qui est égal au diamètre apparent du Soleil. Les deux rayons qui sortent du prisme en J et L ont pratiquement la même inclinaison par rapport au rayon incident. Leur intersection avec le prolongement du rayon incident, M puis P, sont les images virtuelles du soleil, très proches l'un de l'autre (figure 9.1).

Notons que la seconde image, P, due à la réflexion sur une face interne, est beaucoup plus faible en intensité que la première, M.

Où est l'image d'une source à travers un prisme ?

Une source ponctuelle S envoie un faisceau limité par deux rayons qui arrivent sur un prisme d'angle $A = 60°$ et d'indice $n = 3/2$ avec des incidences $i_1 = 30°$ et $i'_1 = 45°$. Dans chaque cas, calculer les angles de réfraction sur les faces d'entrée et de sortie du prisme ainsi que la déviation correspondante. Sur une figure, dessiner les rayons entrant et sortant et faire apparaître l'image S' à travers le prisme.

Solution

Les formules du prisme donnent successivement :

$i_1 = 30°$, $r_1 = 19{,}47°$, $r_2 = 40{,}53°$, $i_2 = 77{,}09°$ et $D = 47{,}09°$

$i'_2 = 45°$, $r'_1 = 28{,}12°$, $r'_2 = 31{,}88°$, $i'_2 = 52{,}38°$ et $D' = 37{,}38°$

Les deux angles de déviation D et D' étant orientés dans le sens des aiguilles d'une montre, ils sont négatifs. Pour un observateur qui regarde la lumière sortir du prisme, tout se passe comme si les deux rayons sortants étaient issus de la source S' située dans le prisme, sur leur prolongement (Figure 9.2). S' ici est une image virtuelle.

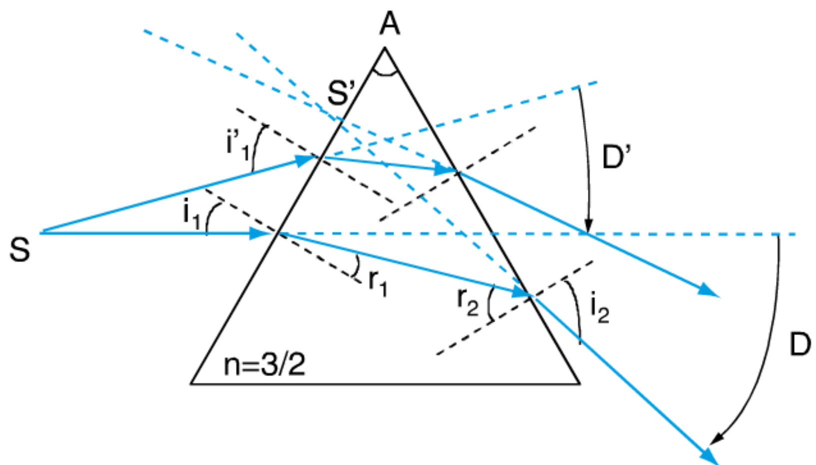


Figure 9.2

La vision d'un poisson dans l'eau

Un promeneur se penche au-dessus de la surface d'un bassin rempli d'eau d'indice 4/3.
1) Il regarde selon la verticale un poisson situé à 50 cm sous la surface de l'eau. A quelle profondeur voit-il le poisson ?
2) Si le promeneur s'incline d'un tout petit angle par rapport à la verticale, voit-il la même chose ? A quelle profondeur voit-il le poisson ?

Solution

1) Si le promeneur se place à la verticale du bassin, il regarde selon la normale à la surface de l'eau. Considérons un rayon lumineux issu du poisson et arrivant dans l'œil de l'observateur. Ce rayon, en incidence normale, ($i = 0°$) est réfracté à la surface de l'eau mais pas dévié car $i = r = 0°$. Le promeneur voit donc également l'image du poisson à la verticale, à 50 cm de profondeur, confondue avec le poisson lui-même.
2) Si le promeneur s'incline d'un tout petit angle par rapport à la surface de l'eau, l'image du poisson peut être déterminée à partir de l'étude de deux rayons qui se propagent depuis le poisson dans l'approximation de Gauss. Le premier se propage selon la normale à la surface de l'eau et n'est pas dévié (voir question 1). Le deuxième a, dans l'eau ($n = 4/3$), un angle d'incidence i et, dans l'air ($n' = 1$), un angle de réfraction r tels que $n \sin i = n' \sin r$. Après réfraction, il est donc dévié et va vers l'œil du promeneur (Figure 9.3). L'image du poisson est à l'intersection des prolongements de ces deux rayons après réfraction par la surface de l'eau. On remarque que l'image du poisson A' est dans l'eau et qu'elle est virtuelle. On peut déterminer sa position en écrivant la grandeur algébrique $\overline{HA'}$ représentée figure 9.3. Dans le triangle HOA' on a : $\tan i = \dfrac{\overline{HO}}{\overline{HA'}}$ et dans le triangle HOA : $\tan r = \dfrac{\overline{HO}}{\overline{HA}}$, soit finalement : $\overline{HA'} \tan i = \overline{HA} \tan r$. Dans l'approximation de Gauss, $\tan i \approx i$, $\tan r \approx r$ et $ni = n'r$. On en déduit que $\overline{HA'}i = \overline{HA}r$ soit que $\overline{HA'} = \dfrac{\overline{HA}}{n}$.
Remarque : dans l'approximation de Gauss, la profondeur de l'image est indépendante de l'angle d'incidence. Comme n est plus grand que 1, $\overline{HA'}$ est inférieure à $\overline{HA}$. L'image du poisson est située à 37,5 cm sous la surface de l'eau, pour $n = 4/3$, et à 2,5 cm au-dessus du poisson.

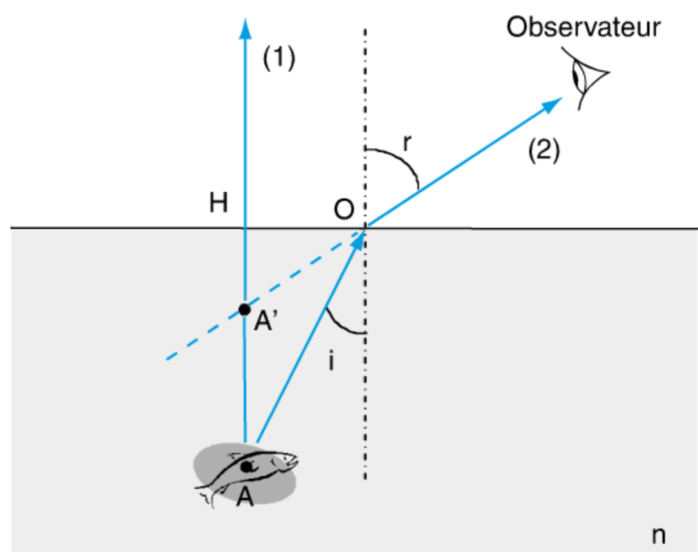


Figure 9.3

FICHE 10

Le dioptre sphérique

Un dioptre sphérique est une surface de séparation entre deux milieux d'indices de réfraction n et n' ; le plan d'incidence est une portion de sphère (Figure 10.1). Un dioptre sphérique a donc un centre C et un rayon r.
On appelle axe principal (ou axe optique) du dioptre sphérique la droite qui passe par C. Conventionnellement, on l'oriente positivement de la gauche vers la droite, ce qui correspond au sens de propagation de la lumière. Sur l'axe principal on prend comme origine le sommet du dioptre. Il est noté S et permet de définir le rayon de courbure $r = \overline{SC}$. Notons que le rayon ainsi défini est une quantité algébrique et peut donc être positif ou négatif.

I Dioptre convexe ou concave

Un dioptre sphérique est soit convexe soit concave (Figure 10.1) ; ces deux configurations géométriques fixent le signe du rayon de courbure :

- Si la lumière rencontre une surface bombée, le dioptre est dit convexe et son rayon de courbure $r > 0$.
- Si la lumière rencontre une surface en creux, le dioptre est dit concave et son rayon de courbure $r < 0$.

Dans l'approximation de Gauss, on prendra l'habitude de schématiser ces dioptres comme des portions de droite dont les extrémités sont inclinées comme la courbure du dioptre. Ils sont représentés Figure 10.2. Dans la mesure où l'on travaillera toujours près de l'axe optique, avec des rayons peu inclinés sur l'axe, cette représentation est parfaitement justifiée.

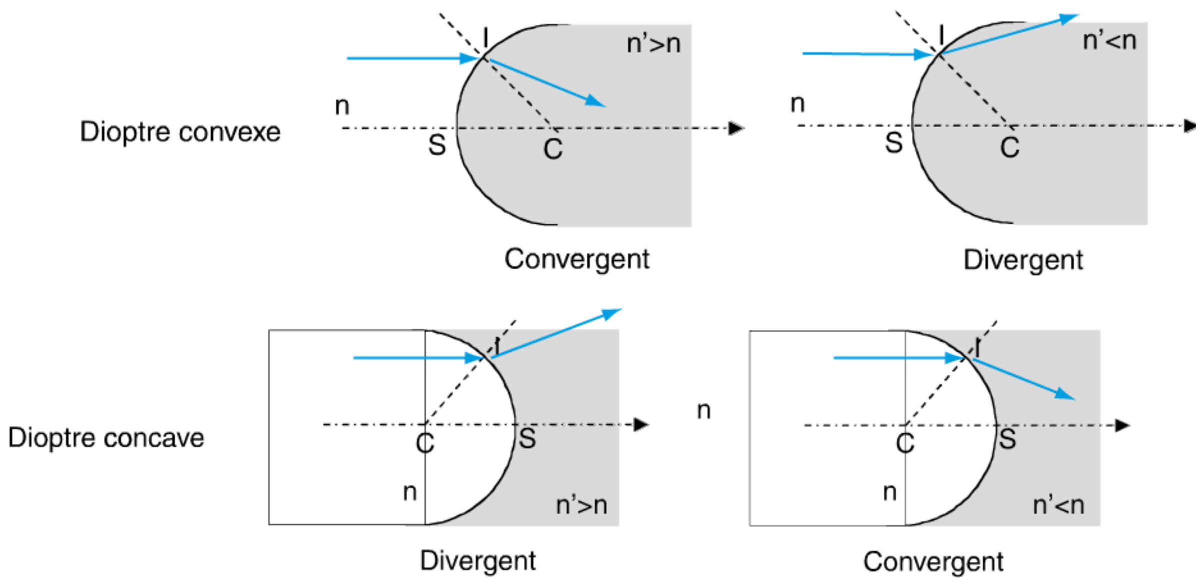


Figure 10.1 Les quatre configurations possibles d'un dioptre sphérique

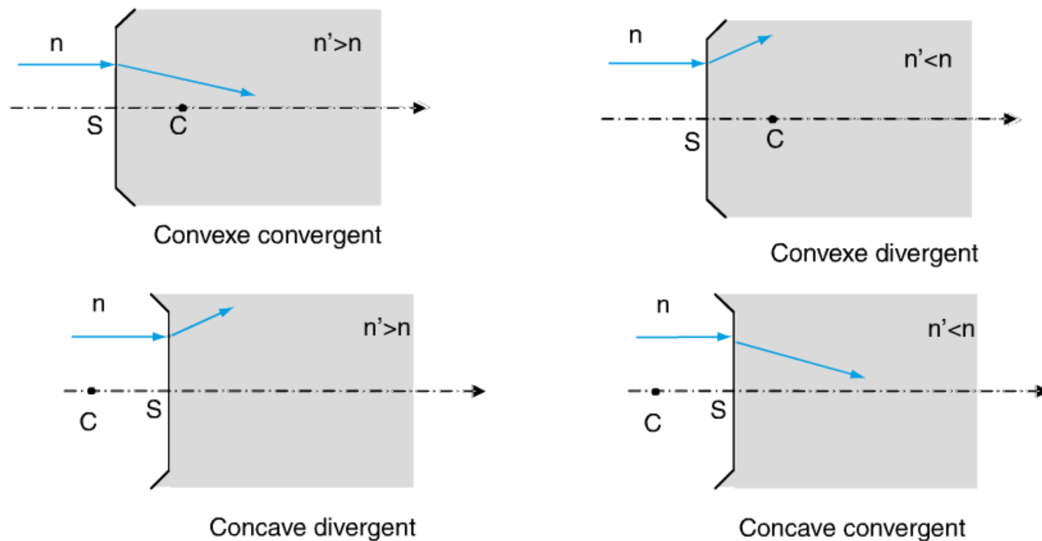


Figure 10.2 Les quatre configurations dans l'approximation de Gauss

II Dioptre convergent ou divergent

Dans un dioptre sphérique convergent, le rayon, après traversée du dioptre se rapproche de l'axe optique. Au contraire, dans un dioptre divergent, il s'en éloigne (Figure 10.1). Si un dioptre convexe est composé d'un deuxième milieu plus réfringent que le premier $(n < n')$ il est convergent, sinon $(n > n')$, il est divergent.
Si un dioptre concave est composé d'un deuxième milieu plus réfringent que le premier $(n < n')$ il est divergent, sinon $(n > n')$, il est convergent.

III La relation de conjugaison

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, un point objet A correspond à un point image unique noté A', dit conjugué de A. La relation de conjugaison relie la position de A sur l'axe principal à celle de son image A'. En posant $p = \overline{SA}$ et $p' = \overline{SA'}$, la relation de conjugaison s'écrit :

$$\boxed{\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'-n}{r}}$$

IV La vergence du dioptre

$\phi = \dfrac{n'-n}{r}$ est la vergence du dioptre sphérique. On l'exprime en m^{-1} (soit r en m) et cette unité est aussi appelée **dioptrie**, de symbole δ. ($1\delta = 1\ \mathrm{m}^{-1}$). Si le dioptre est convergent, $\phi > 0$; s'il est divergent, $\phi < 0$.

V Les foyers du dioptre

Un dioptre sphérique pour lequel n, n' et r sont fixés possède deux points fixes repérés sur l'axe principal par F et F' :

- F est le foyer objet. C'est la position d'un objet dont l'image est rejetée à l'infini.
- F' est le foyer image. C'est la position de l'image d'un objet situé à l'infini.

La position des foyers F et F' sur l'axe principal est repérée par rapport au sommet S du dioptre sphérique par la distance algébrique $f = \overline{SF}$, appelée distance focale objet du dioptre sphérique et par $f' = \overline{SF'}$, sa distance focale image ; on a :

$$\boxed{f = \overline{SF} = -r\frac{n}{n'-n} \quad \text{et} \quad f' = \overline{SF'} = r\frac{n'}{n'-n}}$$

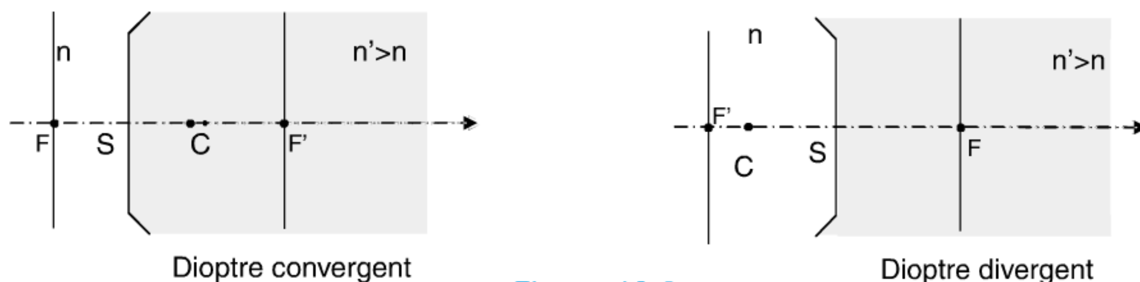


Figure 10.3

On remarque que $\dfrac{f'}{f} = -\dfrac{n'}{n}$. Les deux foyers d'un dioptre ne sont donc jamais symétriques par rapport au sommet S. Pour un dioptre convergent, $f' > 0$; F' est à droite

du sommet du dioptre sphérique et F à gauche. Pour un dioptre divergent au contraire, $f' < 0$; F' est à gauche du sommet et F à droite. Les plans perpendiculaires à l'axe principal passant par F et F' sont les plans focaux du dioptre (Figure 10.3).

VI Autres formes de la relation de conjugaison

La relation de conjugaison du dioptre sphérique s'écrit à partir des distances focales :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$$

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \text{ (Relation de Descartes)}$$

$$ff' = (p - f)(p' - f') \text{ (Relation de Newton)}$$

Le Soleil brûle-t-il une peau mouillée ?

Isabel sort de sa piscine pour bronzer au Soleil. Elle a la peau recouverte de petites gouttes d'eau. Chaque goutte peut être assimilée à un dioptre sphérique de rayon r et d'indice $n' = 4/3$ qui sépare l'air de la peau (figure 10.4). L'indice de l'air est égal à 1.

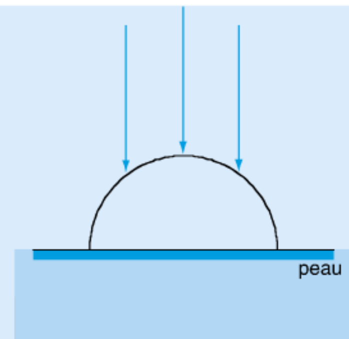


Figure 10.4

1) Tracer les rayons du Soleil qui arrivent sur la peau en incidence normale.

2) Donner une expression analytique de leur position dans la peau. Le Soleil brûle-t-il davantage la peau mouillée que la peau sèche d'Isabel ?

Solution

1)

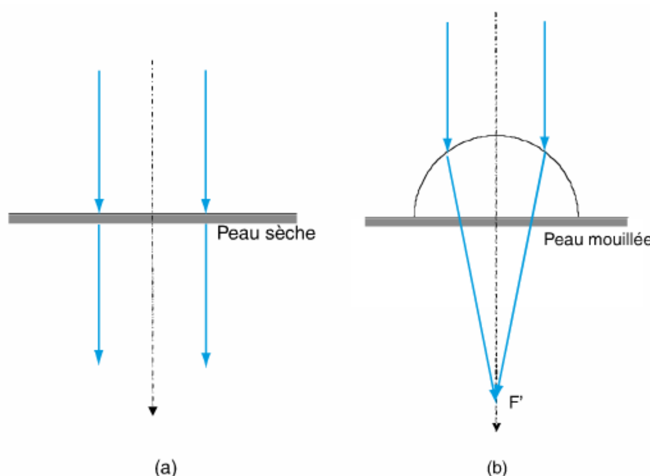


Figure 10.5

2) Les rayons du Soleil arrivent sur la peau d'Isabel en formant un faisceau de rayons parallèles. Ils convergent donc tous au foyer image F' de la goutte. La position de F' est donnée par la distance focale image du dioptre formé par la goutte soit $f' = \dfrac{n'r}{n' - n} = 4r$. Le point focal image F' est situé très en dessous de la surface de la peau d'Isabel (Figure 10.5). Le Soleil ne

la brûle donc pas lorsqu'elle est mouillée mais entraîne une légère concentration de lumière à sa surface.

La vitre cannelée et ses effets de lumière

Des rayons parallèles en provenance du Soleil arrivent sur une vitre d'indice $n' = 3/2$, opacifiée grâce à son verre cannelé, présentant des creux et des bosses (Figure 10.6). Un creux (ou une bosse) peut être assimilé à un dioptre sphérique concave (ou convexe) de rayon r.

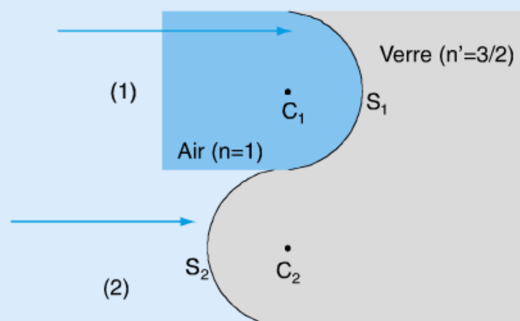


Figure 10.6

1) Déterminer la vergence et la position du foyer image des deux dioptres sphériques ainsi constitués.

2) Représenter la marche d'un faisceau de lumière en incidence normale à la surface de la vitre. Conclure

Solution

1) Le dioptre 1, constitué par un creux, a un rayon de courbure $r_1 = \overline{S_1C_1} = -r$ et une distance focale image $f'_1 = \dfrac{1{,}5(-r)}{1{,}5 - 1} = -3r$; il est divergent. Son foyer image, F'_1, est situé à gauche du sommet S_1, à la distance $3r$ (Figure 10.7). Le dioptre 2, constitué par une bosse, a un rayon de courbure $r_2 = \overline{S_2C_2} = r$ et une distance focale image $f'_2 = \dfrac{1{,}5r}{1{,}5 - 1} = 3r$; il est convergent. Son foyer image, F'_2, est situé à droite du sommet S_2 à la distance $3r$ (Figure 10.7).

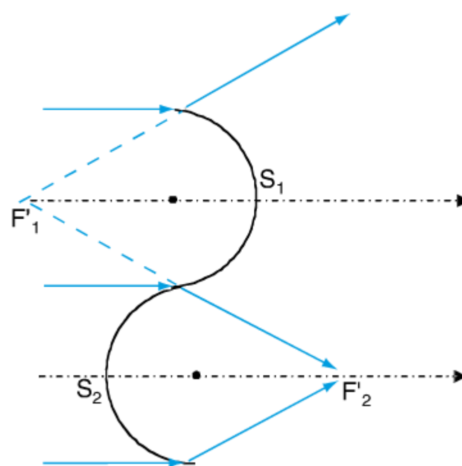


Figure 10.7

2) La marche du faisceau de lumière en incidence normale à la surface de la vitre est représentée figure 10.7. On rappelle qu'un faisceau incident parallèle à l'axe principal converge physiquement par le prolongement de ses rayons au foyer image du dioptre qu'il a traversé. Remarque : une partie de la vitre donne lieu à un faisceau divergent et l'autre à un faisceau convergent (Figure 10.6). Il y a donc alternance entre une concentration et une diffusion de la lumière.

L'influence de la surface de l'océan sur sa profondeur

Du fait de la sphéricité de la Terre, la surface de l'océan est un gigantesque dioptre sphérique (Figure 10.8).
Sachant que le rayon de la Terre vaut 6378 km, à quelle profondeur apparaît le fond de l'océan situé dans l'Océan Atlantique à 3 km sous la surface de l'eau ? On prendra l'indice de l'air égal à 1 et celui de l'eau $n' = 4/3$. La sphéricité de la Terre joue-t-elle un rôle important dans ce phénomène ?

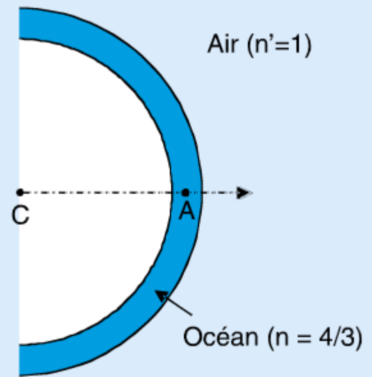


Figure 10.8

Solution

La relation de conjugaison de la surface de l'océan $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'-n}{r}$, donne $p' = -2{,}25026$ km. Le fond de l'océan, situé à 3 km, apparaît donc relevé de 749,74 m.
En considérant la Terre comme un dioptre plan $(r \longrightarrow \infty)$, on trouve $p' = n'\frac{p}{n}$ $= -2{,}25000$ km. La sphéricité ne joue donc pratiquement aucun rôle. La Terre est trop grande pour intervenir dans la propagation des rayons réfractés.

FICHE 11 Construction d'images à travers un dioptre sphérique

La méthode de construction suppose connues les positions des foyers objet F et image F' du dioptre. On se place dans le cadre de l'approximation de Gauss et l'on considère un petit objet filiforme AB, perpendiculaire en A à l'axe principal appelé aussi axe optique. Ainsi, tout objet AB placé dans un plan perpendiculaire à l'axe principal a son image $A'B'$ située également dans un plan perpendiculaire à l'axe principal (Figure 11.1).

I Méthode

Le point B, situé hors de l'axe principal, matérialise le haut de l'objet AB. Afin de construire son image $A'B'$, on choisit de façon astucieuse deux rayons particuliers, incidents sur le dioptre et passant par B. On utilise en général deux des trois rayons suivants :

- Le rayon (1) (ou son prolongement), arrivant sur le dioptre parallèlement à l'axe principal ; après le dioptre, il passe par F' (1′),
- Le rayon (2), passant par C et qui n'est pas dévié,
- Le rayon (3) (ou son prolongement) passant par F ; après le dioptre, il ressort parallèlement à l'axe optique selon (3′).

Si l'objet AB est réel (figure 11.1a et 11.c), les deux rayons physiques incidents passent réellement par B.

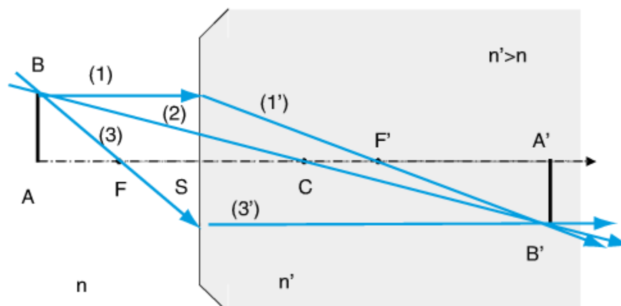


Figure 11.1a

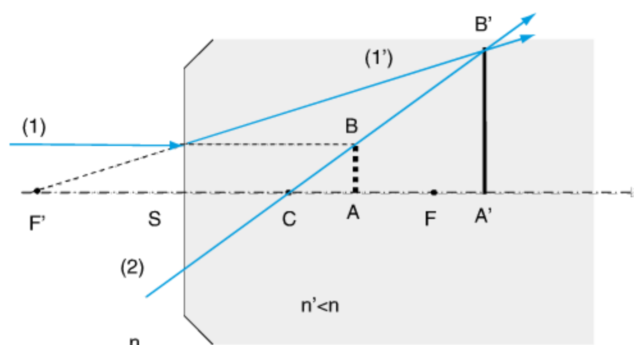


Figure 11.1b

Cependant, si l'objet est virtuel (figure 11.1b), c'est le prolongement d'un ou de deux des rayons incidents qui passe par B. Après le dioptre, les rayons ou leur prolongement se rencontrent en un point B', situé aussi hors de l'axe principal image de B. En abaissant à partir de B' la perpendiculaire à l'axe optique, on obtient le point A', image conjuguée de A ; l'image $A'B'$ est ainsi construite.

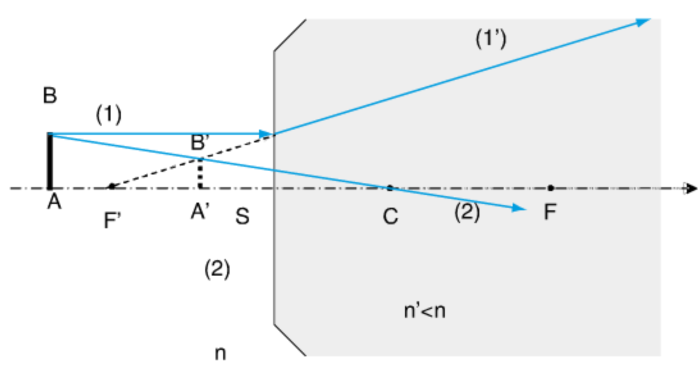


Figure 11.1c

Si B' est à l'intersection des rayons physiques qui ont traversé le dioptre, l'image $A'B'$ est réelle (figure 11.1a et 11.b). Si B' est à l'intersection du prolongement d'au moins un des rayons ayant traversé le dioptre, elle est virtuelle (figure 11.1c).

II Le grandissement transversal

Généralement, un objet AB et son image $A'B'$ à travers un dioptre n'ont pas la même taille ; leur sens et leur nature peuvent également être différents. Le grandissement transversal, noté γ, permet de caractériser les différentes propriétés de l'image (taille, sens et nature) par rapport à celles de l'objet. Il est défini par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Pour un dioptre sphérique, le grandissement transversal s'écrit :

$$\gamma = \frac{np'}{n'p}$$

Si $\gamma < 0$, l'image est renversée ; elle est droite dans le cas contraire ($\gamma > 0$). Si $|\gamma| < 1$, l'image est plus petite que l'objet ; elle est plus grande si $|\gamma| > 1$. Tous les cas possibles sont résumés dans le tableau 11.1.

Tableau 11.1

	$\gamma > 0$ (image droite)	$\gamma < 0$ (image renversée)
$\lvert\gamma\rvert > 1$ (image agrandie)	Droite et agrandie	Renversée et agrandie
$\lvert\gamma\rvert < 1$(image réduite)	Droite et réduite	Renversée et réduite

III Le grandissement longitudinal

Un objet AB non filiforme possède aussi une dimension le long de l'axe principal. Son image $A'B'$ est également caractérisée par un grandissement longitudinal, noté g et défini par :

$$g = \frac{dp'}{dp}$$

g s'écrit, pour un dioptre sphérique :

$$\boxed{g = \frac{n}{n'}\left(\frac{p'}{p}\right)^2}$$

Grandissements transversal et longitudinal sont donc reliés par l'équation $g = \dfrac{n'}{n}\gamma^2$.

Ils ne sont donc en général pas égaux.

Quel grandissement à travers une loupe grossière ?

Une loupe grossière est fabriquée dans une boule de verre de rayon R et d'indice de réfraction $n = 3/2$. Trois tailles différentes ont été choisies ; elles sont représentées Figure 11.2.

On pose sur ces trois loupes un petit objet plat A dont on veut trouver l'image A'. Calculer dans chaque cas sa position et déterminer son grandissement transversal γ.

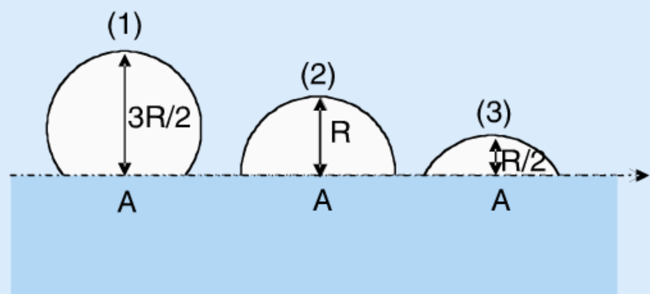


Figure 11.2

Solution

Les rayons incidents sont issus de l'objet A et le dioptre formé par la portion de sphère a toujours pour indices $n = 3/2$ et $n' = 1$. De plus, dans les trois cas, $\overline{SC} = r = -R < 0$ (voir figure 11.2). Le dioptre sphérique formé correspond donc toujours à la configuration indiquée sur la figure 11.3 et sa relation de conjugaison $\dfrac{n'}{p'} - \dfrac{n}{p} = \dfrac{n' - n}{r}$ s'écrit encore $\dfrac{1}{p'} - \dfrac{3}{2p} = \dfrac{1 - 3/2}{-R} = \dfrac{1}{2R}$. On trouve donc

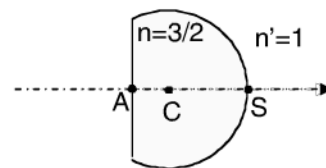


Figure 11.3

$\frac{1}{p'} = \frac{3}{2p} + \frac{1}{2R} = \frac{3R+p}{2pR}$ soit $p' = \frac{2pR}{3R+p}$; le grandissement transversal est donné par $\gamma = \frac{np'}{n'p} = \frac{3p'}{2p} = \frac{3R}{3R+p}$.

L'objet est réel car il est toujours situé en avant du dioptre ($p < 0$).

On trouve successivement :

- $p = -3R/2, p' = -2R, \gamma = 2$
- $p = -R, p' = -R, \gamma = 3/2$
- $p = -R/2, p' = -2R/5, \gamma = 6/5$

Ainsi, quelle que soit la position de l'objet A regardé à travers la loupe, son image est toujours virtuelle ($p' < 0$), droite ($\gamma > 0$) et plus grande que l'objet ($\gamma > 1$).

Image d'une lampe à travers un verre

Une lampe matérialisée par une source ponctuelle A, se trouve à 3 m au-dessus de la surface de l'eau contenue dans un verre. L'indice de l'eau est 4/3 (Figure 11.4).

1) Montrer que le faisceau issu de A, après traversée de la surface du liquide, semble provenir de l'image A' située à 4 m au-dessus de la surface de l'eau.

2) Le verre, d'épaisseur négligeable, contient 2 cm de liquide. Il a une forme sphérique, et un rayon de courbure de 3 cm. Déterminer la position de l'image A'' de A' à travers le fond du verre.

3) La source est en réalité décalée de 1m par rapport à l'axe du verre (Figure 11.5). Pour trouver la position de son image à travers le verre plein, on considère un objet $\overline{AB}$ de 1 m, situé à 3 m de la surface de l'eau. En considérant le grandissement transversal de cet objet à travers les deux dioptres successifs, déduire la taille de $\overline{A''B''}$, image de $\overline{AB}$ à travers les deux dioptres.



Figure 11.4

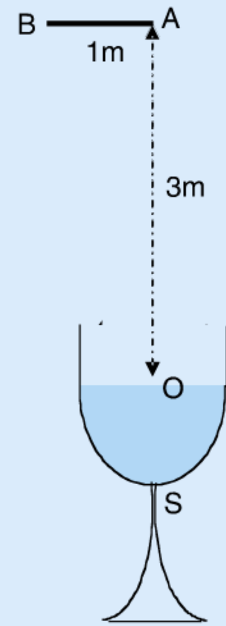


Figure 11.5

4) Sur une figure à l'échelle représenter le verre rempli d'eau, positionner correctement les points A'' et B'' et représenter le faisceau émergent du verre. On suppose que le pied du verre mesure 5 cm. Qu'obtient-on sur la table ?

5) Quel devrait être le rayon de courbure du verre pour que l'image $A''B''$ soit juste sur la surface de la table ?

Solution

1) La surface du liquide se comporte comme un dioptre plan de sommet O. La relation de conjugaison du dioptre plan est celle d'un dioptre sphérique de rayon de courbure infini, qui s'écrit $\dfrac{n'_1}{p'_1} - \dfrac{n_1}{p_1} = 0$, avec $n_1 = 1$, $n'_1 = 4/3$, $p_1 = \overline{OA} = -3$ m (objet réel) et $p'_1 = \overline{OA'}$. On a donc $p'_1 = n'_1 \dfrac{p_1}{n_1} = -4$ m ; A', image de A à travers la surface du liquide, est virtuelle et située à 4 m au-dessus du dioptre plan.

2) On cherche maintenant l'image A'' de A' à travers le fond du verre. Celui-ci forme un dioptre sphérique de sommet S. Pour appliquer la relation de conjugaison du dioptre sphérique, $\dfrac{n'_2}{p'_2} - \dfrac{n_2}{p_2} = \dfrac{n'_2 - n_2}{r_2}$, il faut déterminer la quantité $p_2 = \overline{SA'}$ $= \overline{SO} + \overline{OA'} = \overline{SO} + p'_1 = -2 - 400 = -402$ cm. $p'_2 = \overline{SA''}$ repère la position de A'', image de A' à travers le dioptre sphérique. Avec $n_2 = 4/3$ et $n'_2 = 1$, on a $\dfrac{1}{p'_2} - \dfrac{4/3}{(-402)} = \dfrac{1 - 4/3}{(-3)}$ où toutes les distances sont exprimées en cm. On en déduit $p'_2 = 9{,}28$ cm : A'' est à 9,28 cm en dessous du point S, situé au fond du verre.

3) On souhaite connaître la taille finale de l'image de $\overline{AB}$ à travers les deux dioptres. On vérifie aisément qu'à travers le dioptre plan, le grandissement transversal $\gamma_1 = \dfrac{n_1 p'_1}{n'_1 p_1} = 1$ et $\overline{A'B'} = 1$ m. A travers le deuxième dioptre, on a :

$$\overline{A''B''} = \gamma_2 \overline{A'B'} = \frac{n_2 p'_2}{n'_2 p_2} \overline{A'B'} = \frac{(4/3) * 9{,}28}{1 * (-402)} * 100 \approx -3 \text{ cm}$$

4) La figure 11.6 donne la position des points A'' et B'' ainsi que la représentation du faisceau émergent du verre d'eau. L'image $A''B''$ est en dessous de la surface de la table. Le faisceau émergent forme donc sur la table une tache lumineuse assez large.

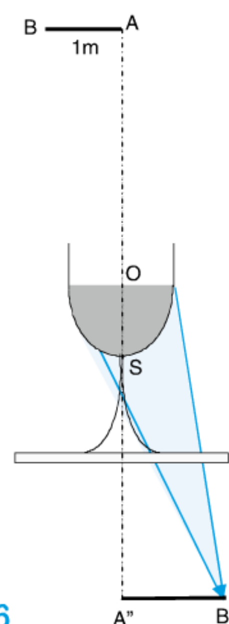


Figure 11.6

5) Si l'image $A''B''$ était sur la table, alors on aurait $p'_2 = 5$ cm, ce qui correspond à la longueur du pied du verre.

Comme $p = -402$ cm, $n_2 = 4/3$ et $n'_2 = 1$, la relation de conjugaison du dioptre sphérique établie en 2) donne $\dfrac{1}{5} + \dfrac{4/3}{402} = \dfrac{1 - 4/3}{r}$. On en déduit que $r = \overline{SC} = -1{,}64$ cm. L'image $A''B''$ serait donc sur la surface de la table si le verre avait un rayon de courbure égal à 1,64 cm.

L'image d'une croix à travers un dioptre

Soit un dioptre sphérique de rayon de courbure $r = 2$ cm qui sépare deux milieux d'indice $n = 1$ et $n' = 1{,}5$.

1) Placer les foyers sur une figure à l'échelle et calculer la vergence du dioptre. Est-il convergent ou divergent ?

2) On place sur l'axe un objet réel filiforme AB de 2 cm de hauteur à une distance égale à $4r$ du sommet S du dioptre (Figure 11.7). Quel est son grandissement transversal ? Quelle est la position et la nature de son image $A'B'$? Retrouver ces propriétés par une construction.

3) L'objet AB est en fait une croix $ABED$ telle que ED coupe AB perpendiculairement en son centre et $ED = AB = 2$ cm (Figure 11.7). Calculer la structure de l'image de cette croix et retrouver les résultats par une construction.

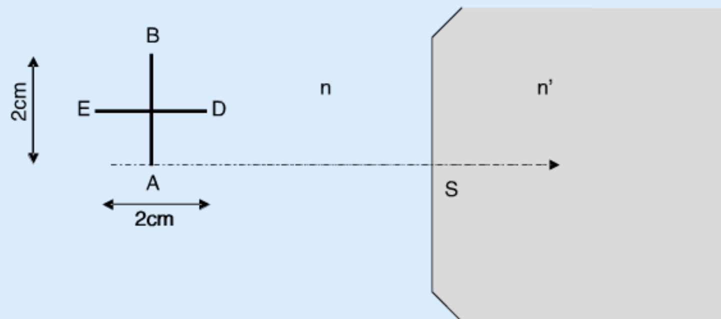


Figure 11.7

Solution

1) Les foyers image F' et objet F sont repérés par rapport au sommet S du dioptre par les distances algébriques : $\overline{SF'} = \dfrac{n'r}{n'-n}$ et $\overline{SF} = -\dfrac{nr}{n'-n}$. Avec $n = 1$, $n' = 1{,}5$ et $r = 2$ cm, on trouve $\overline{SF'} = 3r = 6$ cm et $\overline{SF} = -2r = -4$ cm. $\phi = \dfrac{n'-n}{r} = \dfrac{1}{2r}$ $= 25\,\delta$. La vergence ϕ étant positive, le dioptre est convergent. La position des foyers F et F' est représentée figure 11.8.

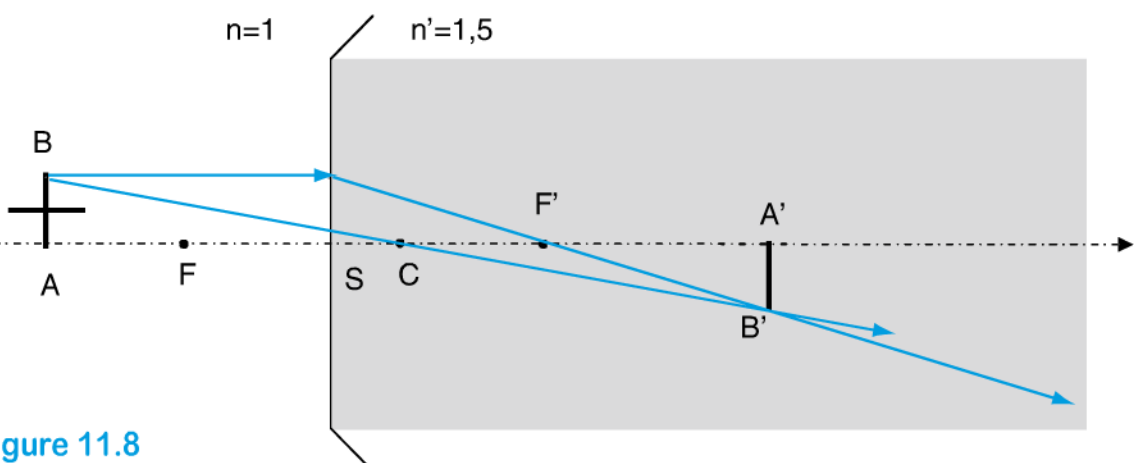


Figure 11.8

2) Comme l'objet est réel, $p = -4r = -8$ cm. La relation de conjugaison du dioptre s'écrit $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \phi$ et donne $p' = \frac{n'p}{p\phi + n} = \frac{1{,}5p}{25p+1}$. ϕ étant ici exprimé en dioptries, on prendra soin d'exprimer p en mètres. De même, le grandissement transversal s'écrit $\gamma = \frac{np'}{n'p} = \frac{1}{25p+1}$. On en déduit que $p' = 0{,}12$ m $= 12$ cm et $\gamma = -1$. L'image $A'B'$ est donc réelle, renversée et de même taille que l'objet AB. Elle est placée à 12 cm après le sommet S du dioptre. Sa construction, représentée figure 11.8, permet de retrouver ces résultats.

3) On connaît A' et B', images de A et B, déterminées à partir du grandissement tranversal. Pour connaître l'image de la croix il suffit de déterminer E' et D', images respectives de E et D. Pour cela, on va appliquer l'équation issue de la relation de conjugaison, $p' = \frac{1{,}5p}{25p+1}$, aux deux points E et D, ainsi que le grandissement transversal, donné par $\gamma = \frac{1}{25p+1}$. De même, le grandissement longitudinal, $g = \gamma^2 \frac{n'}{n} = 1{,}5\gamma^2$, doit être calculé.

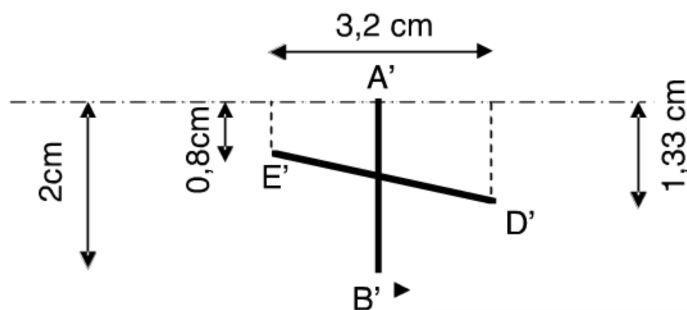


Figure 11.9

Pour le point D : $p_D = -7$ cm ; on trouve donc $p'_D = 14$ cm, $\gamma_D = -1{,}33$ et $g_D = 2{,}66$. Pour le point E : $p_E = -9$ cm et on trouve $p'_E = 10{,}8$ cm, $\gamma_E = -0{,}8$ et $g_E = 0{,}96$ (Figure 11.9).

Tout comme A' et B', les points E' et D' sont réels mais l'image de la croix est déformée car les grandissements transversal et longitudinal sont différents pour D et E (Figure 11.9). La construction point par point de l'image de la croix $ABED$ est représentée figure 11.10. Elle permet de rendre compte directement de cette déformation.

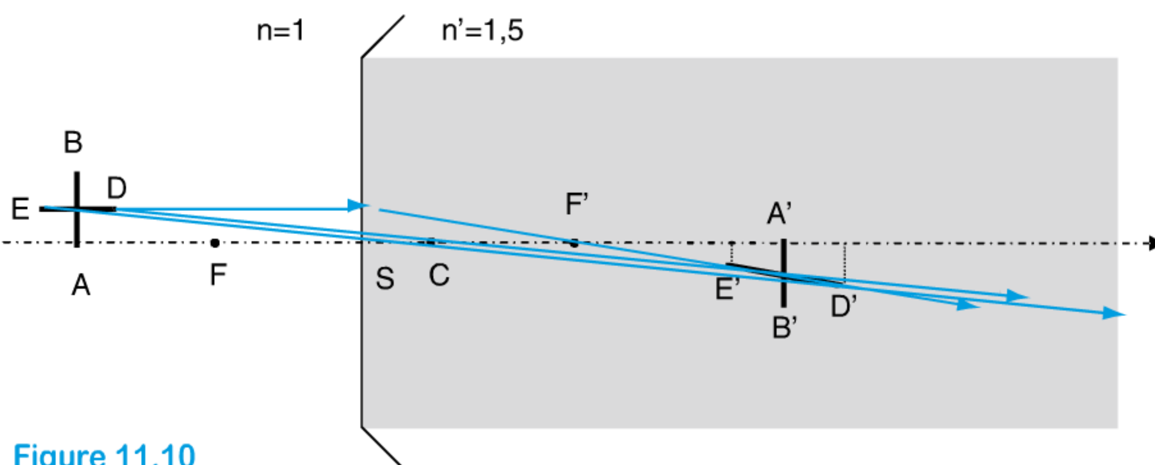


Figure 11.10

Images à travers un dioptre sphérique : tous les cas possibles

FICHE 12

I Nature de l'image par rapport à la position de l'objet

Quelle que soit la nature (convergente ou divergente) d'un dioptre, un objet AB est toujours réel s'il est situé à gauche du sommet S du dioptre ; on a alors $p = \overline{SA} < 0$. Dans le cas contraire, l'objet AB est virtuel et $p = \overline{SA} > 0$.
La nature de l'image $A'B'$ d'un objet AB dépend de la position et de la nature de ce dernier.

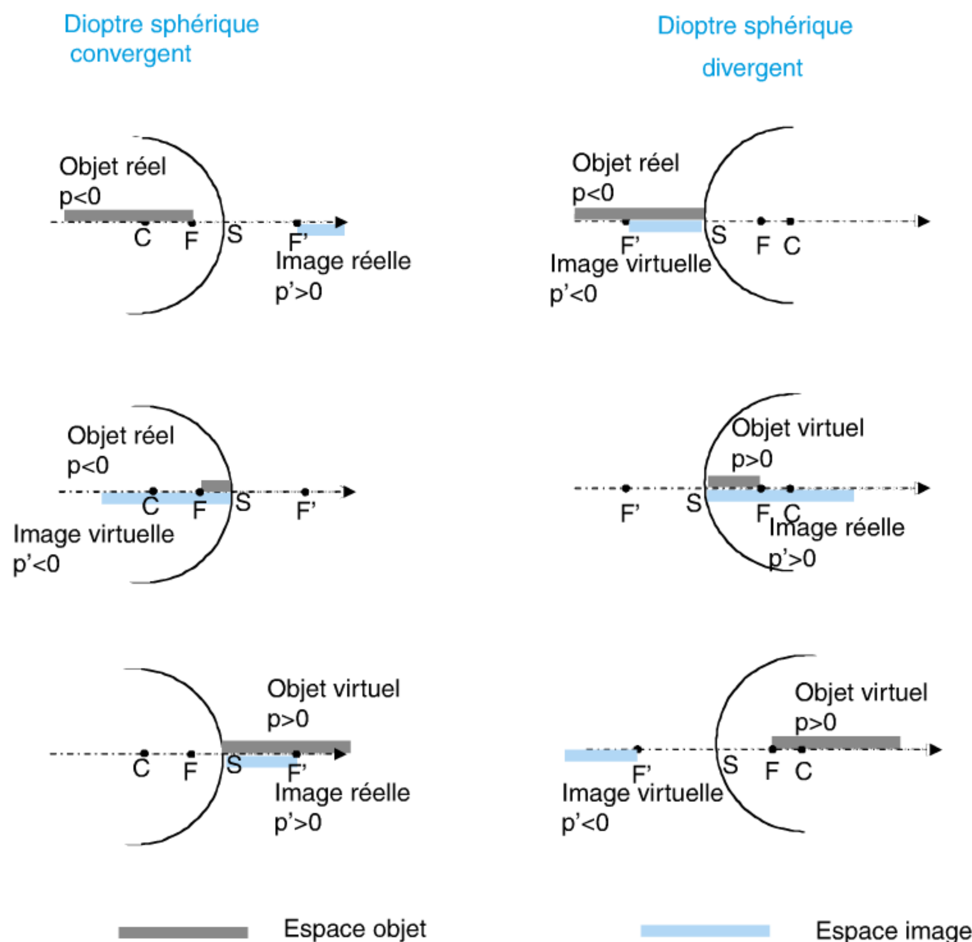


Figure 12.1 Représentations des différentes possibilités offertes par un dioptre sphérique (convergent ou divergent)

- D'une manière générale, si le point B' d'une image $A'B'$ est situé à l'intersection des rayons physiques issus du point B, l'image $A'B'$ est **réelle**.
- Si, au contraire, le point B' d'une image $A'B'$ est situé à l'intersection du prolongement d'au moins un des rayons issus du point B, l'image $A'B'$ est **virtuelle**. Les différents cas possibles sont résumés dans la figure 12.1, que le dioptre soit convergent ou divergent.

II Construction d'une image

Dans la fiche 11 la construction d'images se faisait grâce à l'utilisation de deux rayons physiques particuliers. On choisira ici :

- Le rayon passant par C qui n'est pas dévié.
- Le rayon (ou son prolongement) arrivant sur le dioptre parallèlement à l'axe principal ; après traversée du dioptre, ce rayon (ou son prolongement) passe par F'.

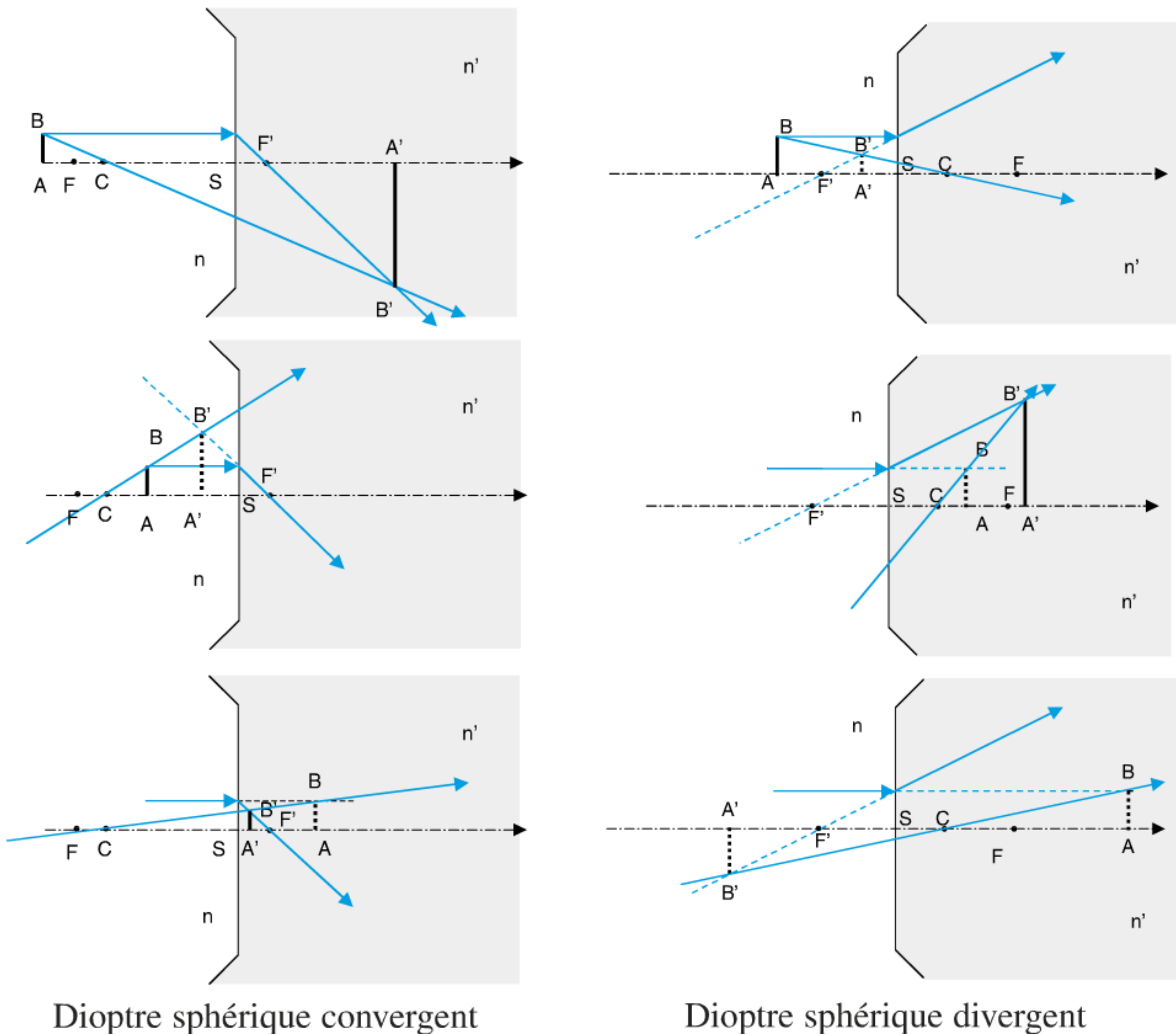


Figure 12.2

La figure 12.2 présente les six constructions possibles correspondant aux différentes possibilités présentées figure 12.1. Afin de respecter l'approximation de Gauss, on a schématisé les dioptres comme des portions de droites.

III Sens et taille d'une image à travers un dioptre

On rappelle que, si $\gamma < 0$, l'image est renversée ; si $\gamma > 0$, elle est droite. Si $|\gamma| < 1$, l'image est plus petite que l'objet ; si $|\gamma| > 1$, elle est plus grande.

Dans quel type de dioptre un objet et son image apparaissent-ils symétriques par rapport au sommet S ?

Soit un dioptre sphérique de rayon de courbure r qui sépare deux milieux d'indice n et n'. On veut qu'un objet réel A et son image conjuguée A' soient situés symétriquement par rapport au sommet S du dioptre. Déterminer par une construction commentée les caractéristiques du dioptre.

Solution

Dans un dioptre divergent, A et A' ne peuvent être symétriques par rapport à S que s'ils sont virtuels ; on ne peut donc pas les observer. Au contraire, dans un dioptre convergent, la situation recherchée est possible. Seul ce dernier cas sera donc étudié.
Considérons d'abord le cas d'un dioptre de rayon de courbure positif ($r = \overline{SC} > 0$) (Figure 12.3). Positionnons l'objet AB et son image $A'B'$, dans deux plans perpendiculaires symétriques par rapport à S. Un rayon, issu du point B de l'objet et passant par le centre C, n'est pas dévié ; on trace donc le rayon passant par B et C. B' se situe nécessairement à l'intersection de cette droite et du plan de l'image. On place ainsi B'. Un deuxième rayon, initialement parallèle à l'axe optique, passe, après traversée du dioptre, par B' mais aussi par le foyer image F'. Cela permet de placer F', situé à l'intersection de ce dernier rayon et de l'axe optique. On retrouve par la construction (Figure 12.3) que l'image est réelle et renversée et on constate que le dioptre est convergent ($f' > 0$). Comme $f' = \dfrac{n'r}{n' - n}$ et $r = \overline{SC} > 0$, on a nécessairement $n' > n$.

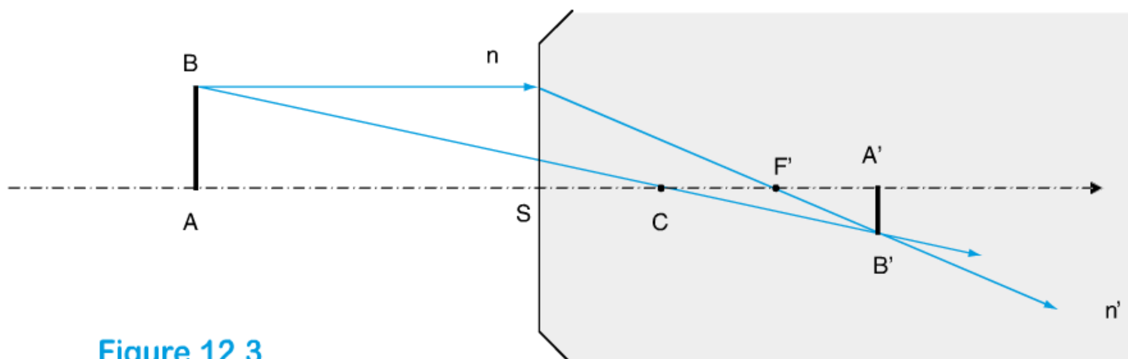


Figure 12.3

On peut faire un raisonnement équivalent dans le cas d'un dioptre convergent dont le rayon de courbure r est négatif $(r = \overline{SC} < 0)$. En effectuant la même construction que précédemment, on retrouve que le foyer image du dioptre F' est situé à droite du sommet S du dioptre. On retrouve donc que $f' > 0$ et que, avec $f' = \dfrac{n'r}{n' - n}$ et $r = \overline{SC} < 0, n' < n$ (Figure 12.4).

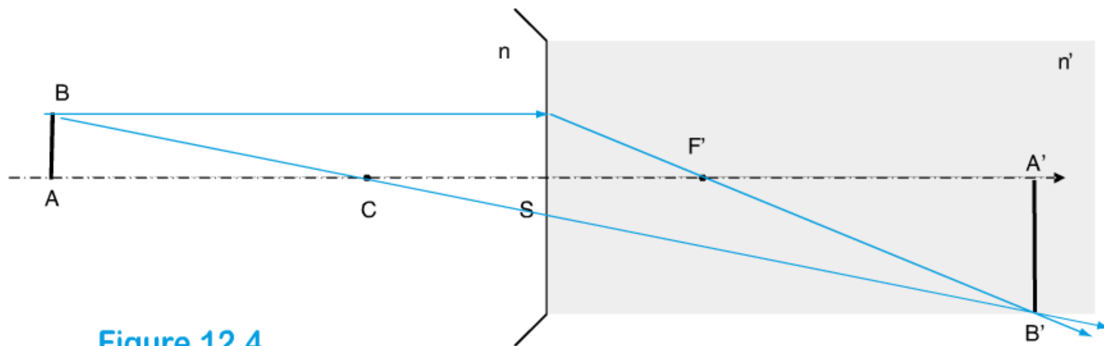


Figure 12.4

L'image d'une étiquette collée sur une bouteille

On considère une bouteille, assimilable à un dioptre sphérique de sommet S et d'indice $n = 4/3$ (Figure 12.5). À l'extérieur, l'indice de l'air est $n' = 1$. On néglige l'épaisseur de la paroi de verre. L'étiquette de la bouteille est l'objet AB que l'on regarde à travers le liquide.

1) Déterminer la position du foyer image F' du dioptre formé par la paroi de la bouteille par rapport au sommet S. Quelle est la vergence de ce dioptre ?

2) Où se situe l'image A' de A ? Quelle est sa nature ? Construire l'image $A'B'$ de AB. Déterminer son grandissement transversal γ ?

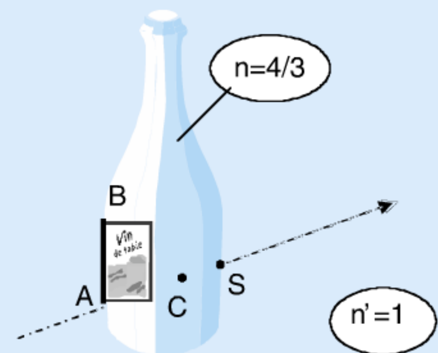


Figure 12.5

Solution

1) Soit r le rayon de courbure du dioptre ; comme $n = 4/3$ et $n' = 1$, $f' = \overline{SF'} = \dfrac{n'r}{n' - n} = -3r$. r étant négatif, f' est positif et le dioptre est convergent.

La vergence est donnée par $\phi = \dfrac{n' - n}{r} = -\dfrac{1}{3r}$. Elle est bien positive.

2) $p = \overline{SA} = 2r < 0$. La bouteille est équivalente à un dioptre sphérique et p et p', position de A', sont reliés par la relation de conjugaison $\dfrac{n'}{p'} - \dfrac{n}{p} = \dfrac{n' - n}{r}$ qui s'écrit

encore $\frac{1}{p'} - \frac{4/3}{2r} = \frac{1/3}{r}$. On trouve donc pour la position de l'image $A'B'$, $p' = 3r$. $p' < 0$; l'image de l'étiquette est donc virtuelle, du même côté que l'objet. D'autre part, elle se situe en dehors de la bouteille. La figure 12.6 présente la construction de cette image. Le grandissement transversal d'un dioptre sphérique est $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{np'}{n'p} = \frac{4p'}{3p} = 2$. La construction de la figure 12.6 est bien en accord avec ces résultats.

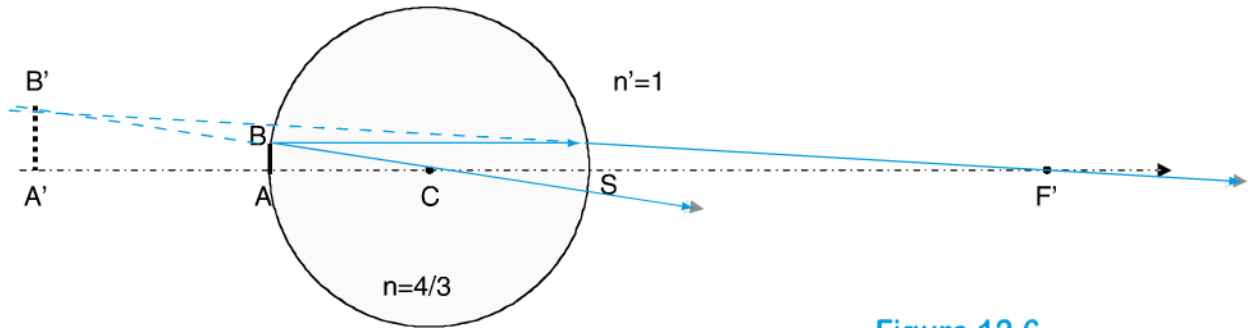


Figure 12.6

Déplacement d'un poisson dans un bocal

Un poisson A se déplace à l'intérieur d'un aquarium sphérique, de rayon R et d'épaisseur négligeable, rempli d'un liquide d'indice n (Figure 12.7). Il se déplace sur l'axe $S'S$ et sa position est repérée par la quantité $\overline{CA} = x$ où C est le centre du dioptre constitué par la paroi avant de l'aquarium.

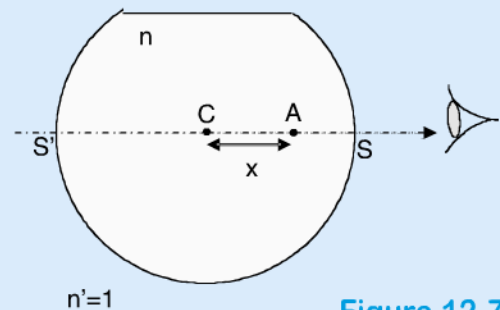


Figure 12.7

1) Exprimer $p = \overline{SA}$, position du poisson p en fonction de x et de R. Exprimer $p' = \overline{SA'}$, position de son image à travers le dioptre de sommet S en fonction de x, R et n.

2) Donner l'expression de la distance algébrique $\delta = \overline{AA'}$. Démontrer que la fonction $\delta(x)$ passe par des *extrema* pour $x_1 = -\frac{R}{\sqrt{n}-1}$ et $x_2 = \frac{R}{\sqrt{n}+1}$. Montrer qu'il y a un seul *extremum* compris entre S' et S ; déterminer sa nature (maximum ou minimum)

Solution

1) Le dioptre sphérique a pour rayon de courbure $\overline{SC} = r = -R$, où R est positif. D'autre part, $p = \overline{SA} = \overline{SC} + \overline{CA} = x - R$. La relation de conjugaison du dioptre, qui sépare le milieu incident d'indice n d'un deuxième milieu d'indice $n' = 1$, s'écrit : $\frac{1}{p'} - \frac{n}{x-R} = \frac{1-n}{(-R)}$, d'où $p' = \frac{R(x-R)}{R + x(n-1)}$.

2) $\delta = \overline{AA'} = \overline{AS} + \overline{SA'} = p' - p = \dfrac{x(n-1)(x-R)}{R + x(n-1)}$.

La dérivée de la fonction $\delta(x)$ vaut :

$\delta'(x) = -\dfrac{(n-1)}{[R + x(n-1)]^2}[x^2(n-1) + 2xR - R^2]$.

Elle s'annule quand $x^2(n-1) + 2xR - R^2 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est égal à $4nR^2$; elle a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-R - R\sqrt{n}}{n-1} = \dfrac{-R}{\sqrt{n}-1} < 0$ et $x_2 = \dfrac{-R + R\sqrt{n}}{n-1} = \dfrac{R}{\sqrt{n}+1} > 0$. Si l'on s'intéresse aux solutions comprises entre S' et S, on doit avoir $-R < x < R$, (figure 12.7), ce qui élimine la solution x_1.

Le tableau de variation 12.1 représenté ci-dessous montre le comportement de la fonction $\delta(x)$ pour $-R < x < R$. La fonction $\delta(x)$ est représentée figure 12.8, en coordonnées réduites, les abscisses et ordonnées étant normalisées par rapport à R, le rayon de l'aquarium. Elle montre que, pour les valeurs de x situées entre S et S', il n'y a qu'un seul *extremum* ; c'est un maximum qui correspond à x_2. En injectant l'expression de x_2 dans celle de $\delta(x)$, on peut montrer que $\delta(x_2) = R\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$.

Tableau 12.1

x	$-R$		0		$\frac{R}{\sqrt{n}+1}$		R
$\delta'(x)$		+		+	0	−	
$\delta(x)$	$-2R\frac{(n-1)}{2-n}$	↗	0	↗	$R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$	↘	0

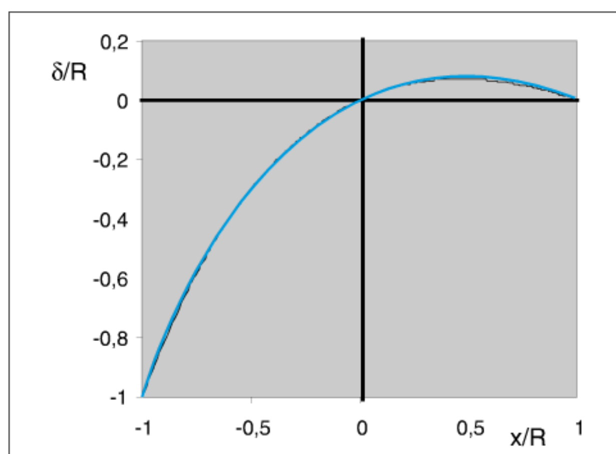


Figure 12.8

FICHE 13

Étude de rayons parallèles ou inclinés sur un dioptre sphérique

I Méthode

- Les rayons émis par un objet à l'infini sont parallèles et souvent inclinés sur l'axe principal du dioptre ; une étude de leur cheminement à travers le dioptre permet de construire l'image $A'B'$ de AB. Deux rayons particuliers suffisent pour déterminer $A'B'$. Cependant, leur choix est quelque peu différent des deux rayons utilisés pour un objet situé à une distance finie du dioptre (voir fiches 11 et 12).
- En sortie de dioptre, les rayons incidents (ou leur prolongement), parallèles à l'axe principal (voir figures 13.1a et 13.2a), passent tous par le foyer image du dioptre, F'. En effet, par définition, F' correspond alors à B'. Pour des rayons parallèles à l'axe principal, B' est donc confondu avec A' et l'image est ponctuelle.
- Pour des rayons inclinés par rapport à l'axe principal, nous recommandons de choisir le rayon parallèle aux rayons incidents passant par le centre C du dioptre : il traverse le dioptre sans être dévié. On définit le plan focal comme le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par F'. Le rayon passant par C coupe ce plan focal image en B'. Tous les faisceaux incidents de même inclinaison que ce dernier (ou leur prolongement) passent aussi par B' (voir figures 13.1b et 13.2b). Le plan focal image est donc également le plan de l'image de AB et coupe l'axe principal en A', ce qui permet de déterminer l'image $A'B'$.
- Dans le cas de rayons incidents venant de l'infini et inclinés par rapport à l'axe principal, l'image $A'B'$ est toujours située dans le plan focal image du dioptre (voir figures 13.1b et 13.2b).

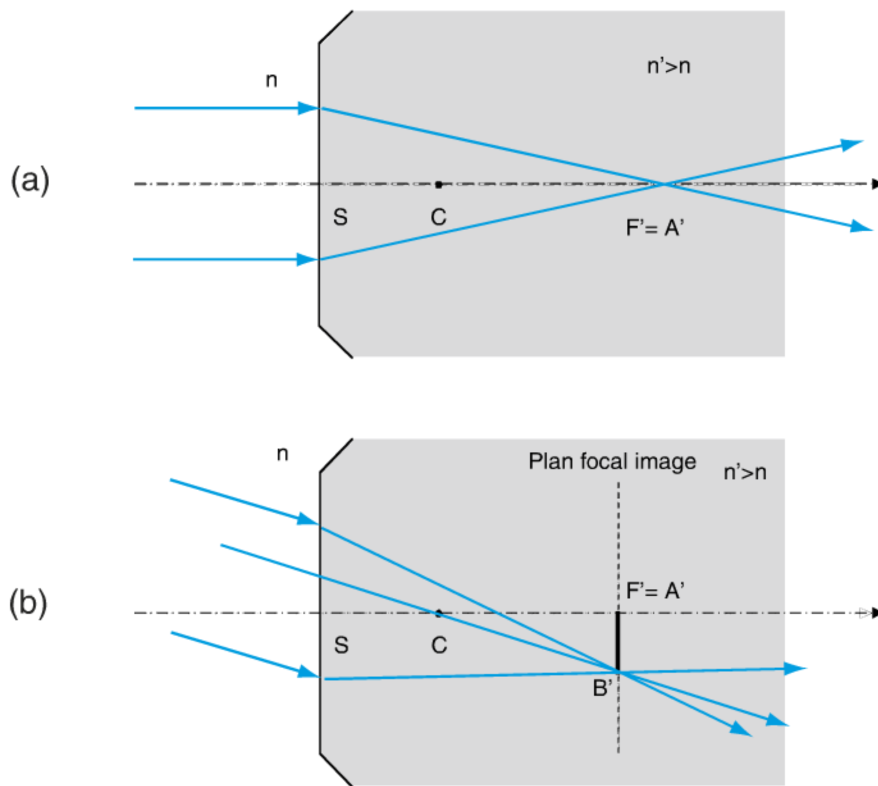


Figure 13.1

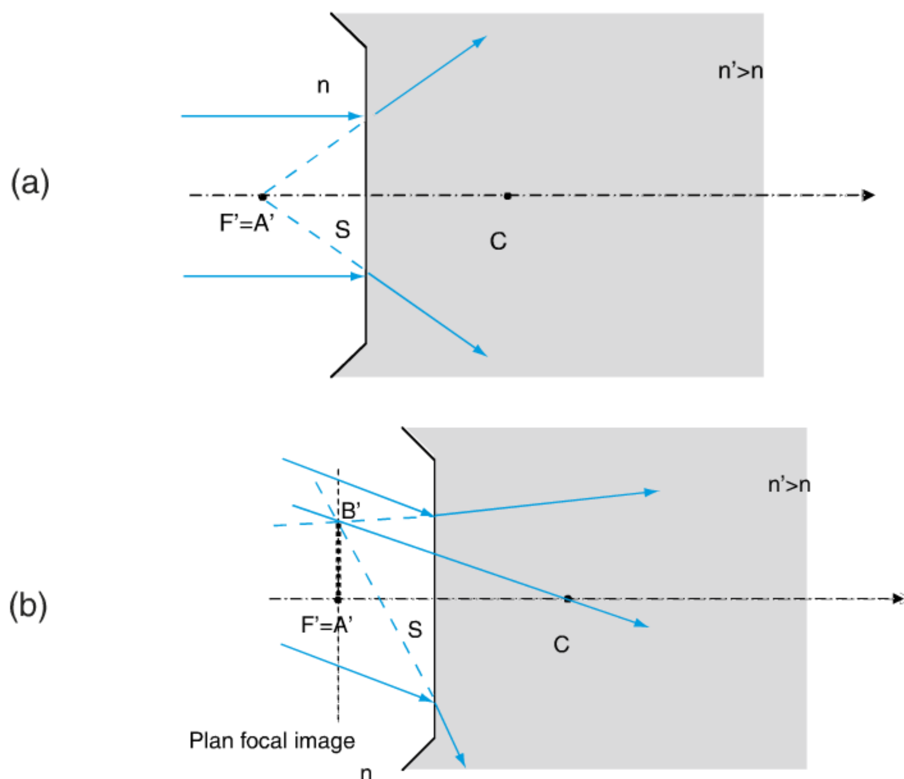


Figure 13.2

Effet d'un dioptre divergent sur des rayons inclinés

On considère deux rayons incidents sur un dioptre sphérique divergent, inclinés par rapport à l'axe principal (Figure 13.3). Construire les rayons en sortie du dioptre.

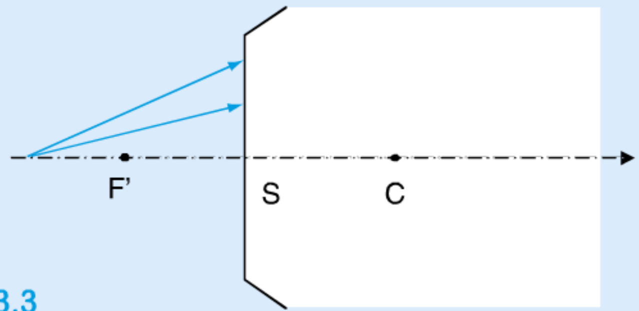


Figure 13.3

Solution

Pour déterminer quels sont les rayons sortants correspondant aux deux rayons incidents, il faut tracer pour chacun d'eux un rayon de même inclinaison que les rayons incidents et passant par le centre C du dioptre. Ce dernier n'est pas dévié et coupe le plan focal image en un point, par où passe le rayon recherché (Figure 13.4).

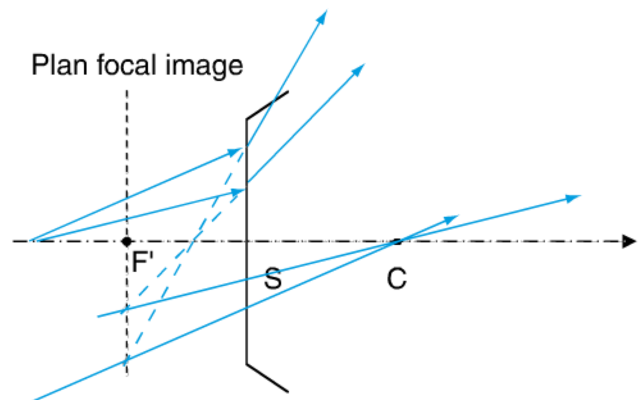


Figure 13.4

D'où viennent ces rayons sortants ?

Soit un rayon sortant d'un dioptre sphérique convergent présenté sur les figures 13.5(a) et 13.5(b).

Comment déterminer, dans les deux cas présentés ici, le parcours du rayon incident correspondant au rayon sortant ?

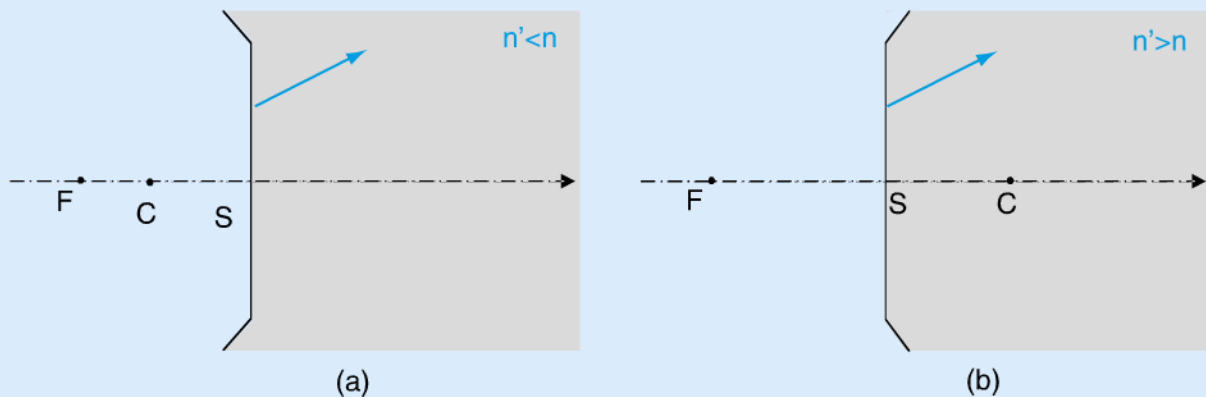


Figure 13.5

Solution

Pour déterminer le parcours du rayon incident correspondant aux rayons sortants représentés figures 13.5, il faut tracer un deuxième rayon sortant parallèle au premier et passant par le centre C du dioptre (Figures 13.6). Ce rayon n'est pas dévié et coupe le plan focal objet (F) en un point B où passe le rayon recherché.

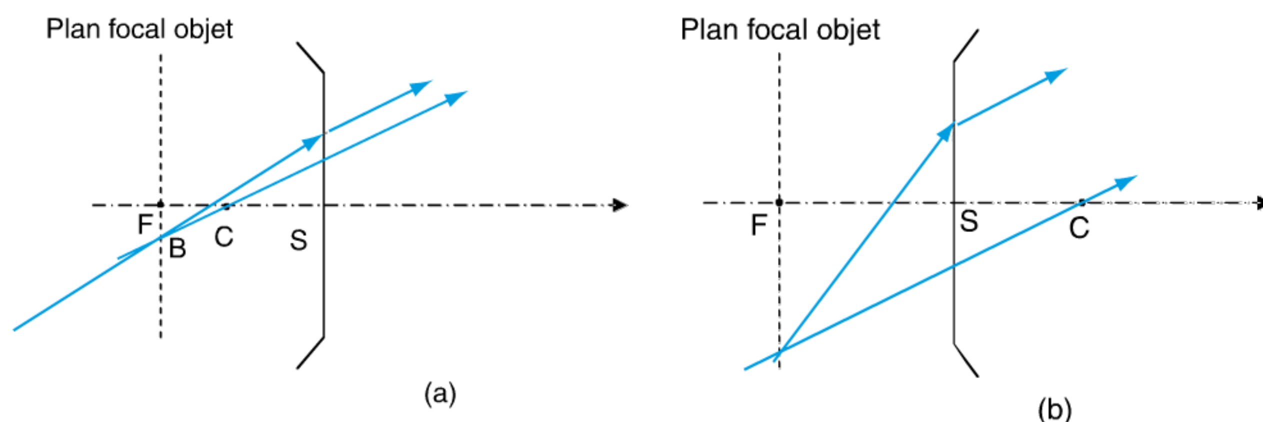


Figure 13.6

Effet de deux dioptres sphériques sur un rayon parallèle

Un système optique d'indice n est limité par deux dioptres sphériques convexes identiques, de sommets S_1 et S_2 et de centres C_1 et C_2. On a $\overline{S_1C_1} = \overline{S_2C_2} = r > 0$ et $\overline{S_1S_2} = e = \alpha r$ $(\alpha \geqslant 0)$ (Figure 13.7).

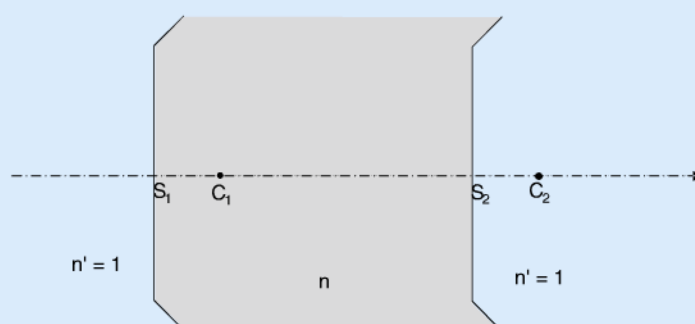


Figure 13.7

1) On pose $p = \overline{S_1A}$, $p' = \overline{S_1A'}$ et $p'' = \overline{S_1A''}$. A' est l'image de A à travers le dioptre 1 et A'' l'image de A par rapport au système optique formé par les deux dioptres. On repère toutes ces images par rapport au sommet du premier dioptre, S. Exprimer p'' en fonction de p, α, r et n. On mettra le résultat sous la forme $p'' = \dfrac{1}{\beta} + \alpha r$ où β est une fonction de p, α, r et n.

2) Que devient p'' quand $p \to \infty$ (objet à l'infini).
3) Dans la suite du problème, on reste dans le cas où l'objet réel est à l'infini ($p \to \infty$). Que se passe-t-il lorsque $\alpha \to 0$?
4) Montrer simplement qu'il existe deux positions différentes du dioptre 2 (soit deux valeurs différentes de α) telles que $p'' = \overline{S_1F_1'}$, où F_1' est le foyer image du dioptre 1.
Application numérique : $n = 3/2$ et $r = 3$ cm
Faire un schéma complété par un tracé de rayons pour les deux valeurs de α trouvées précédemment.
5) Pour quelles valeurs de α l'image finale est-elle à droite du système optique ?
6) Où se trouve A'' pour $\alpha = 1$; calculer $\overline{S_2A''}$? Placer A'' sur un schéma à partir d'une construction.

Solution

1) Ecrivons la relation de conjugaison de chaque dioptre :

- Dioptre 1 : $\dfrac{n}{\overline{S_1A'}} - \dfrac{1}{\overline{S_1A}} = \dfrac{n-1}{\overline{S_1C_1}} = \phi$ (i)
- Dioptre 2 : $\dfrac{1}{\overline{S_2A''}} - \dfrac{n}{\overline{S_2A'}} = \dfrac{1-n}{\overline{S_2C_2}} = \dfrac{1-n}{r} = -\phi$ (ii)

ϕ est ici la vergence du dioptre 1. Par ailleurs, $\overline{S_1S_2} = \alpha\overline{S_1C_1} = \alpha r$ avec $\alpha \geqslant 0$.

La relation (ii) peut encore s'écrire $\dfrac{1}{\overline{S_2S_1} + \overline{S_1A''}} - \dfrac{n}{\overline{S_2S_1} + \overline{S_1A'}} = \dfrac{1-n}{r}$ ou encore, si l'on pose $p = \overline{S_1A}$, $p' = \overline{S_1A'}$ et $p'' = \overline{S_1A''}$,

$$\frac{1}{p'' - \alpha r} - \frac{n}{p' - \alpha r} = -\phi \qquad \text{(iii).}$$

De même, la relation (i) s'écrit $\dfrac{n}{p'} - \dfrac{1}{p} = \phi$, ce qui entraîne $p' = \dfrac{np}{p\phi + 1}$. Lorsqu'on injecte cette expression dans la relation (iii), on déduit que $\dfrac{1}{p'' - \alpha r} = -\phi + \dfrac{n}{\dfrac{np}{p\phi+1} - \alpha r}$. En posant $\beta = -\phi + \dfrac{n}{\dfrac{np}{p\phi+1} - \alpha r}$, on obtient l'expression recherchée : $p'' = \dfrac{1}{\beta} + \alpha r$.

2) Si $p \to \infty$, alors $\beta \to \beta_\infty = -\phi + \dfrac{n\phi}{n - \alpha r\phi} = \phi\left(-1 + \dfrac{n}{n - \alpha r\phi}\right) = \dfrac{\alpha r\phi^2}{n - \alpha r\phi}$

et $p'' \xrightarrow[p \to -\infty]{} \dfrac{1}{\beta_\infty} + \alpha r$.

3) Si $p \to \infty$ et $\alpha \to 0$ (les deux dioptres sont accolés), $\beta_\infty \to 0$ et $p'' \to \infty$. L'image est rejetée à l'infini et le rayon incident parallèle à l'axe principal ne change pas de direction en traversant le dioptre. Il reste donc parallèle à l'axe optique.

4) On cherche maintenant la valeur de α pour laquelle l'image de A à travers le système est confondue avec F_1'. On a toujours $p \to \infty$, soit $p'' \xrightarrow[p\to-\infty]{} \dfrac{1}{\beta_\infty} + \alpha r$. D'autre part, $\overline{S_1F_1'} = f_1' = \dfrac{nr}{n-1} = \dfrac{n}{\phi}$. On cherche donc la condition sur α pour que $p'' = \dfrac{1}{\beta_\infty} + \alpha r = \dfrac{n}{\phi}$. Cela revient à résoudre l'équation du second degré $\alpha^2 r^2 \phi^2 - (n+1)\alpha r\phi + n = 0$. Les deux solutions sont $\alpha_1 = \dfrac{n}{r\phi}$ et $\alpha_2 = \dfrac{1}{r\phi}$.

A.N. : $r = 3$ cm, $n = 3/2$, donc $\phi = \dfrac{100}{6}$ m^{-1}, $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_2 = 2$. Dans les deux cas $p'' = \overline{S_1F_1'} = \dfrac{n}{\phi} = 9$ cm.

La figure 13.8 montre le tracé de rayons pour les deux cas étudiés.

5) Si A'' est à droite du système optique, $p'' = \overline{S_1A''} > \overline{S_1S_2}$, soit $p'' > \alpha r$. Sachant que $p'' = \dfrac{1}{\beta_\infty} + \alpha r$, cela revient à chercher la condition pour laquelle $\beta_\infty > 0$; on peut l'écrire $\phi\left(-1 + \dfrac{n}{n - \alpha r\phi}\right) > 0$. Comme par ailleurs $\phi > 0$, il faut résoudre $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\alpha r\phi}{n}} > 1$.

On peut vérifier qu'avec la valeur de $n = 3/2$ et $\alpha \geqslant 0$, $1 - \dfrac{\alpha r\phi}{n} > 0$. On peut donc simplifier l'expression qui devient $\dfrac{\alpha r\phi}{n} > 0$. Sachant que $r > 0$, cette inégalité est toujours vraie ; A'' est donc toujours à droite du système.

6) On reste dans le cas où $p \to \infty$. Si $\alpha = 1$, $\beta_\infty = \phi\left(-1 + \dfrac{n}{n - r\phi}\right)$ et

$$p'' = \frac{1}{\beta_\infty} + r = \frac{1}{\phi}\left(\frac{1}{-1 + \dfrac{n}{n - r\phi}}\right) + r,$$

soit, après simplification, $p'' = \overline{S_1A''} = \dfrac{1}{\phi}\left(\dfrac{n - r\phi}{r\phi}\right) + r$.

On en déduit que $\overline{S_2A''} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A''} = -r + p'' = \dfrac{1}{\phi}\left(\dfrac{n - r\phi}{r\phi}\right)$.

Avec $\phi = \dfrac{n-1}{r}$, on peut écrire $\overline{S_2A''} = \dfrac{1}{\phi}\left(\dfrac{n - r\phi}{r\phi}\right) = \dfrac{r}{(n-1)^2}$.

A.N. : avec $n = 3/2$ et $r = 3$ cm, $\overline{S_2A''} = 4r = 12$ cm.
La construction correspondante est représentée Figure 13.9.

Figure 13.8

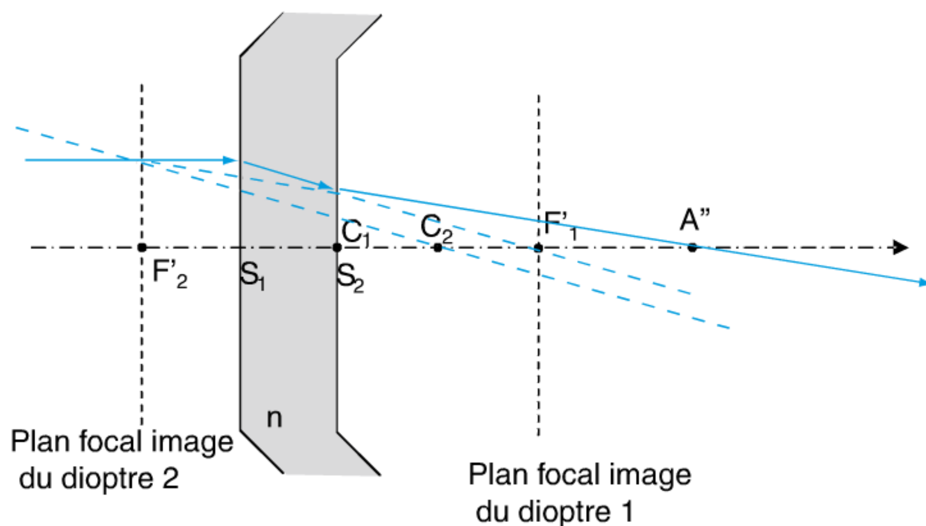


Figure 13.9

FICHE 14

Le dioptre plan

Un dioptre plan est un dioptre sphérique de rayon de courbure r égal à l'infini. Il est donc perpendiculaire à l'axe principal (appelé aussi axe optique). S, le sommet du dioptre plan, est le point d'intersection entre le dioptre et l'axe optique. Ce dioptre sépare un premier milieu, d'indice n, d'un deuxième, d'indice n'. Deux configurations seulement sont possibles selon que $n' < n$ (Figures 14.1a et 14.c) ou que $n' > n$ (Figures 14.1b et 14.1d).

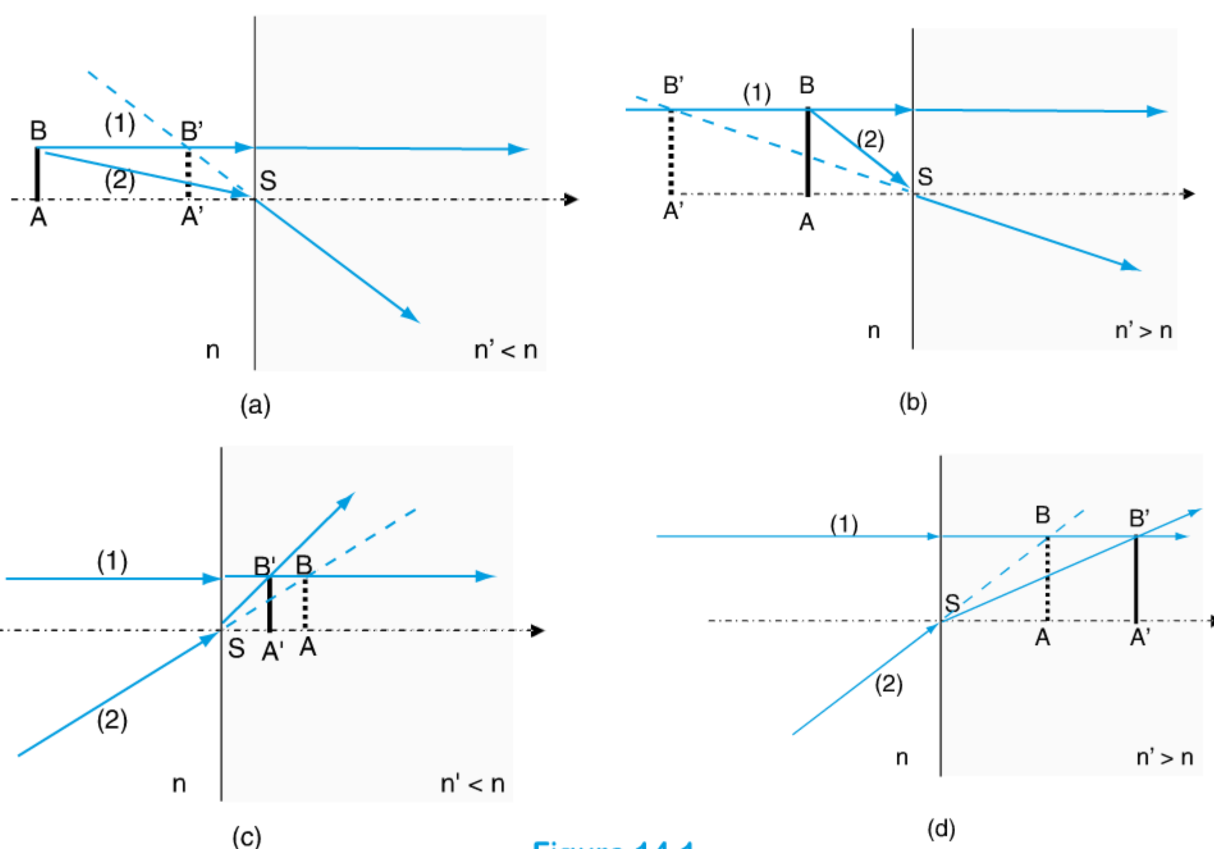


Figure 14.1

1 La relation de conjugaison

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, la relation de conjugaison du dioptre plan relie la position de A sur l'axe principal à celle de son image conjuguée A' et s'écrit :

$$\boxed{\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = 0 \text{ soit } p' = \frac{n'}{n}p}$$

où $p = \overline{SA}$ et $p' = \overline{SA'}$.

La vergence du dioptre plan est infinie. Les foyers F et F' sont situés à l'infini.

II Construction d'images

Considérons un petit objet filiforme AB perpendiculaire en A à l'axe principal. Dans le cadre de l'approximation de Gauss, son image $A'B'$ est également située dans un plan perpendiculaire à l'axe principal en A' (voir figure 14.1).
La construction se fait en considérant le point B, situé hors de l'axe principal. On utilise deux rayons incidents choisis de façon astucieuse et issus de B.

- Le rayon (1), parallèle à l'axe principal qui passe par la normale au dioptre plan ; il est en incidence normale et ressort sans être dévié.
- Un rayon (2), incliné par rapport à l'axe principal, passant par S ; il ressort dévié selon la loi de Snell-Descartes. Il se rapproche de la normale si $n' > n$ et s'en écarte dans le cas contraire.

Si l'objet AB est réel, les deux rayons choisis passent par le point objet B (Figures 14.1a et 14.1b). Si l'objet est virtuel (figures 14.1c et 14.1d), le rayon (1) mais aussi le prolongement du rayon (2) passent par le point B.
Après la traversée du dioptre, les rayons ou leurs prolongements se croisent en B', image de B. En abaissant la perpendiculaire à l'axe principal à partir de B', on trouve A', image conjuguée de A et finalement l'image $A'B'$. L'image d'un objet réel à travers un dioptre plan est toujours virtuelle car B' est sur le trajet du prolongement d'un des deux rayons sortants (Figures 14.1a et 14.1b). Au contraire, l'image d'un objet virtuel est réelle car les deux rayons sortants passent par B' (figures 14.1c et 14.1d). Dans tous les cas, l'image $A'B'$ a la même taille que l'objet AB (figures 14).

III Le grandissement transversal

L'expression du grandissement transversal d'un dioptre plan est la même que celle d'un dioptre sphérique $\gamma = \dfrac{np'}{n'p}$. Pour un dioptre plan $p' = \dfrac{n'}{n}p$ et $\gamma = 1$. Un objet et son image ont donc toujours la même taille et le même sens.

Quelle est la nature d'une image à travers un dioptre plan

En utilisant la relation de conjugaison du dioptre plan, déterminer la nature de l'image. On étudiera le cas de l'objet réel et celui de l'objet virtuel.

Solution

La relation de conjugaison du dioptre plan est $p' = \dfrac{n'}{n}p$. p et p' ont donc toujours le même signe. Si l'objet est réel, $p < 0$ et $p' < 0$: l'image est virtuelle.

Si l'objet est virtuel, $p > 0$ et $p' > 0$: l'image est réelle. Dans ce cas seulement elle peut être visualisée sur un écran.

Construction d'images à travers un dioptre plan

À partir de la construction de l'image d'un objet réel à travers un dioptre plan qui sépare deux milieux d'indice n et n' $(n' > n)$, montrer qu'ils ont la même taille.

Solution

Soit un point B, situé devant le dioptre plan, hors de l'axe principal et issus d'un objet AB réel (Figure 14.2). À partir de ce point, la construction de deux rayons particuliers permet de déterminer l'image $A'B'$ de AB.

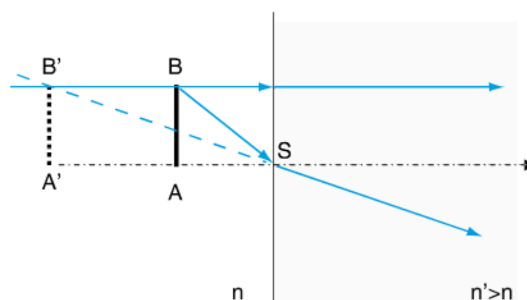


Figure 14.2

Pour un dioptre plan, le plus simple est de choisir le rayon parallèle à l'axe qui n'est pas dévié. Un autre rayon, incliné sur l'axe, est dévié après le dioptre plan en se rapprochant de la normale $(n' > n)$ (Figure 14.2). Le prolongement des deux rayons incidents se coupe en B'. Ce point étant sur le rayon parallèle à l'axe, il est à la même distance de l'axe que B. Si, à partir de B', on trace la perpendiculaire à l'axe principal on obtient l'image $A'B'$ qui a donc la même taille que l'objet $(\gamma = 1)$. L'image $A'B'$ est virtuelle ; c'est pourquoi elle est représentée en pointillés.

Le dioptre déformable

Pierre passe ses vacances dans une station de ski et se rend à une exposition de sculptures faites dans des blocs de glaces.

1) Il se tient immobile devant la face plane d'un gros bloc de glace. Il est assimilable à un objet réel AB placé à 1 mètre du sommet S d'un dioptre plan qui sépare un premier milieu d'indice $n = 1$ (l'air) d'un deuxième milieu d'indice $n' = 1{,}31$ (la glace). Quels sont la position, la nature, le sens et la taille de son image à travers le dioptre plan ? Pierre verra-t-il son image ?

2) Il se déplace pour se positionner à 1 mètre du sommet S d'une autre face du gros bloc de glace. Celle-ci est sphérique, concave, de rayon de courbure égal à 2 m. Quelles sont la position, la nature, le sens et la taille de son image ?

3) Quelle doit être la couleur du bloc de glace pour que l'image de Pierre soit celle obtenue à travers un dioptre plan. Sera-t-elle visible et de même taille ?

Solution

1) Si Pierre est un objet réel ($p = -1$ m). La relation de conjugaison du dioptre plan donne $p' = \frac{n'}{n}p = -1{,}31$ m. L'image est donc droite et de même taille que lui ($\gamma = 1$), mais elle est virtuelle et placée derrière lui. Pierre ne la verra pas.

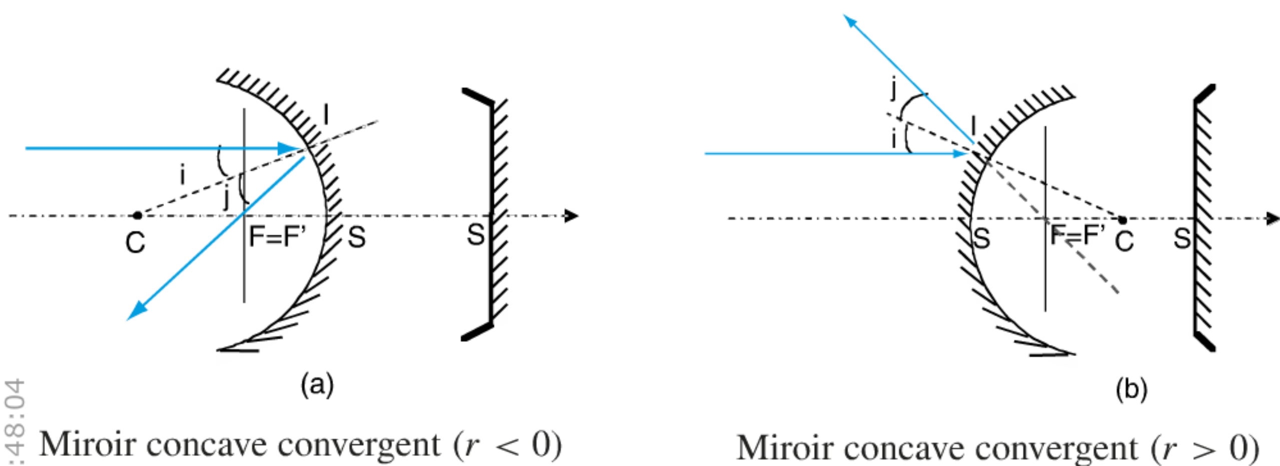
2) Pierre devient assimilable à un objet réel AB placé à une distance $p = -1$ m du sommet d'un dioptre sphérique de rayon de courbure $r = -2$ m. Pour caractériser son image il faut utiliser maintenant la relation de conjugaison devient : $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r}$, soit $p' = \frac{n'p}{n + p\phi} = \frac{1{,}31p}{1 + p\phi} = -1{,}13$ m. L'image de Pierre a donc avancé de 0,18 m mais elle est toujours virtuelle, derrière lui et invisible. Le grandissement transversal étant $\gamma = \frac{np'}{n'p} = 0{,}86$, l'image est toujours droite mais plus petite que lui. On remarquera que ce dioptre sphérique est divergent car $\phi = \frac{n' - n}{r} = -0{,}155\,\delta$.

3) La relation de conjugaison d'un dioptre plan $p' = \frac{n'}{n}p = 1{,}31p$. Celle d'un dioptre sphérique est $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r} = \phi$ soit $p' = \frac{n'p}{n + p\phi} = \frac{1{,}31}{1 + p\phi}$. Les deux images sont confondues si $p' = 1{,}31p = \frac{1{,}31p}{1 + p\phi}$ soit si $p\phi = 0$. Il y a deux solutions :

- $p = 0$ et Pierre est collé au bloc de glace. Dans ce cas $P' = 0$ et son image sera droite confondue avec lui-même et de même taille. La valeur du rayon de courbure du dioptre sphérique n'a alors plus d'importance.
- $\phi = 0$, le dioptre est plan et l'image droite et de même taille. Cependant, Pierre n'est plus confondu avec son image qui, à travers un dioptre plan, est toujours virtuelle.

Le miroir sphérique

- Un miroir sphérique est une portion de sphère dont la surface est recouverte d'une couche réfléchissante pour les longueurs d'onde du faisceau incident. Comme pour le dioptre sphérique, la représentation du miroir sphérique dans le plan d'incidence est une portion de cercle de centre C qui coupe l'axe principal, orienté de la gauche vers la droite, en un point S appelé le sommet du miroir (figures 15.1).
- Le rayon de courbure du miroir sphérique est la quantité algébrique $r = \overline{SC}$. On rappelle que, conventionnellement, l'orientation de l'axe principal, appelé aussi axe optique, suit le sens de propagation de la lumière incidente sur le miroir.



Miroir concave convergent ($r < 0$)

Miroir concave convergent ($r > 0$)

Figure 15.1

1 Concavité et vergence

Un miroir sphérique (comme le dioptre sphérique) est soit concave, avec un rayon de courbure $r < 0$ (figure 15.1a), soit convexe, avec un rayon de courbure $r > 0$ (figure 15.1b).

Un miroir sphérique concave ($r < 0$) réfléchit un rayon incident en le rapprochant de l'axe principal ; il est donc convergent (figure 15.1a). Au contraire, un miroir sphérique convexe ($r > 0$), réfléchit un rayon incident en l'écartant de l'axe principal ; il est donc divergent (figure 15.1b).

II Approximation de Gauss et symbole du miroir

Des rayons, même peu écartés de l'axe principal, arrivant sur un miroir sphérique avec de grands angles d'incidence, ne respectent pas l'approximation de Gauss. Dans le cadre de cet ouvrage, nous ne travaillerons que dans cette approximation, avec des rayons très peu écartés de l'axe principal. Afin de les tracer de façon confortable nous proposons de représenter les miroirs sphériques par les symboles dessinés à côté des portions de sphère de la figure 15.1a et 15.1b. Ce sont des portions de droite dont les deux extrémités rappellent la courbure du miroir : elles sont dirigées vers la gauche pour un miroir concave (et convergent), et vers la droite pour un miroir convexe (et divergent).

III La relation de conjugaison

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, un point objet A correspond à un point image unique noté A', dit conjugué de A. La relation de conjugaison relie la position de A sur l'axe principal à celle de son image A'. Si l'on pose $p = \overline{SA}$ et $p' = \overline{SA'}$, la relation de conjugaison s'écrit pour le miroir sphérique :

$$\boxed{\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r}}$$

IV Les foyers

Un miroir sphérique possède deux points fixes, repérés sur l'axe principal par F et F' (voir figures 15.1) :

- F est le foyer objet. C'est la position d'un objet dont l'image est rejetée à l'infini.
- F' est le foyer image. C'est la position de l'image d'un objet situé à l'infini.

Les foyers F et F' sont deux points conjugués et leur position sur l'axe principal est repérée par rapport au sommet S du miroir sphérique par les distances algébriques $\overline{SF}$ et $\overline{SF'}$.

$f = \overline{SF}$ est la distance focale objet du miroir sphérique et $f' = \overline{SF'}$, sa distance focale image ; on a :

$$\boxed{f = \overline{SF} = \frac{r}{2} \text{ et } f' = \overline{SF'} = \frac{r}{2}}$$

On remarque que $f' = f$; les deux foyers d'un miroir sphérique, F et F', sont toujours confondus et situés à mi-chemin entre le sommet S et le centre C du miroir. On a donc l'habitude de parler du foyer du miroir. Pour un miroir sphérique convergent, $f' > 0$:

F' et F situés à gauche du sommet S du miroir (figure 15.1a). Pour un miroir sphérique divergent au contraire, $f' < 0$ et F' et F sont situés à droite du sommet S (figure 15.1b). Les plans perpendiculaires à l'axe principal passant par F et F' sont les plans focaux objet et image du miroir sphérique. Ils sont donc aussi confondus et situés à mi-chemin entre le sommet S et le centre C du miroir. On parle encore du plan focal du miroir. Soulignons que, pour un miroir sphérique, le signe de la distance focale image $f' = \frac{r}{2}$ ne détermine plus la vergence ; en effet, pour un miroir convergent, $f' < 0$.

V Rayons parallèles et inclinés

Rappelons que les rayons incidents (1), parallèles à l'axe principal (Figure 15.2), passent, après réflexion sur le miroir sphérique, par $F' = F$. D'après le principe inverse de la lumière, tout rayon incident (2), incliné, passant par F (et donc F') (Figure 15.2) ressort parallèle à l'axe optique.

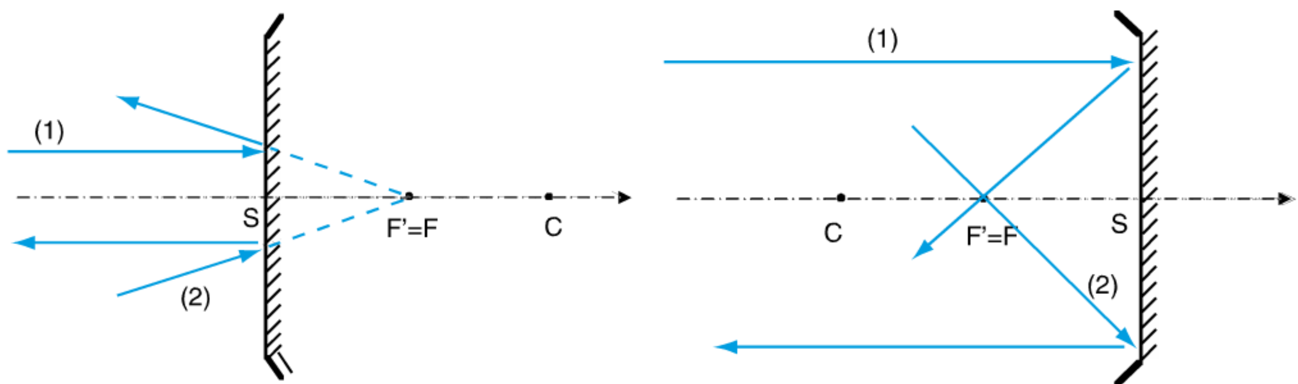


Figure 15.2

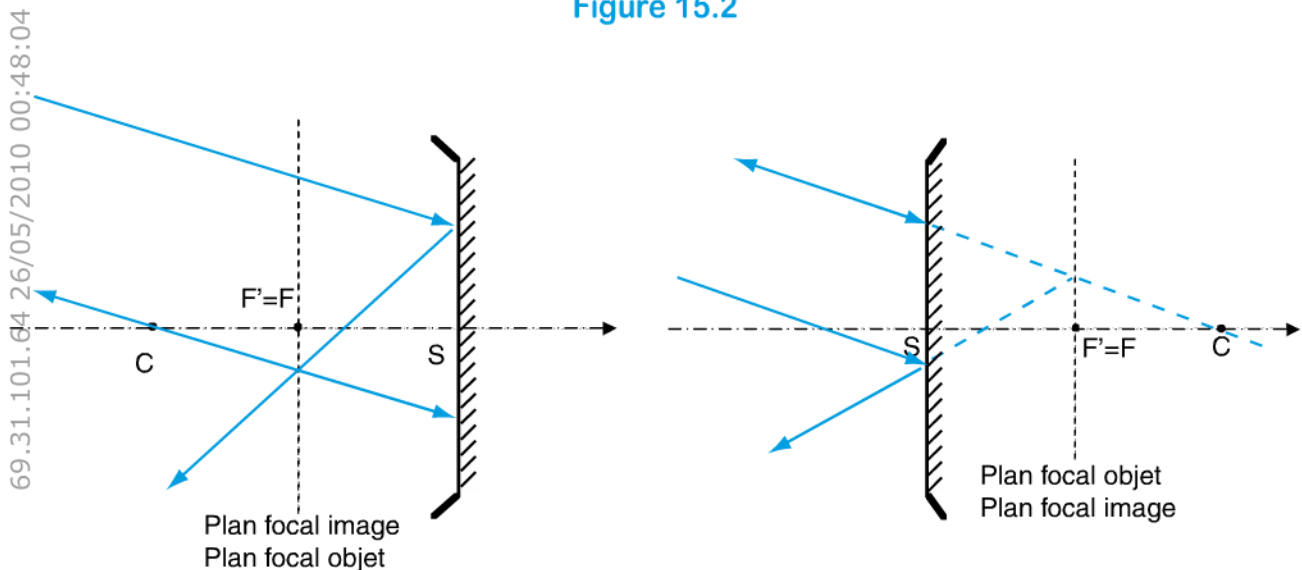


Figure 15.3

Considérons maintenant des rayons incidents parallèles, inclinés par rapport à l'axe principal mais ne passant plus par les foyers. Parmi eux, celui qui passe par C n'est pas dévié et coupe le plan focal image en un point. Tous les rayons parallèles à ce dernier (ou leurs prolongements) se réfléchissent sur le miroir en passant par ce point d'intersection (Figure 15.3).

VI Autres formes de la relation de conjugaison

Si l'on exprime la relation de conjugaison du miroir sphérique à partir des distances focales, on a :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \text{ (Relation de Descartes)}$$

$$ff' = (p - f)(p' - f') \text{ (Relation de Newton)}$$

Jeu de miroirs

On considère un système composé de deux miroirs, l'un plan, l'autre sphérique. Un rayon parallèle à l'axe optique frappe tout d'abord le miroir sphérique. Tracer son cheminement après réflexion sur les deux miroirs dans chacun des deux cas présentés sur la figure Figure 15.4.

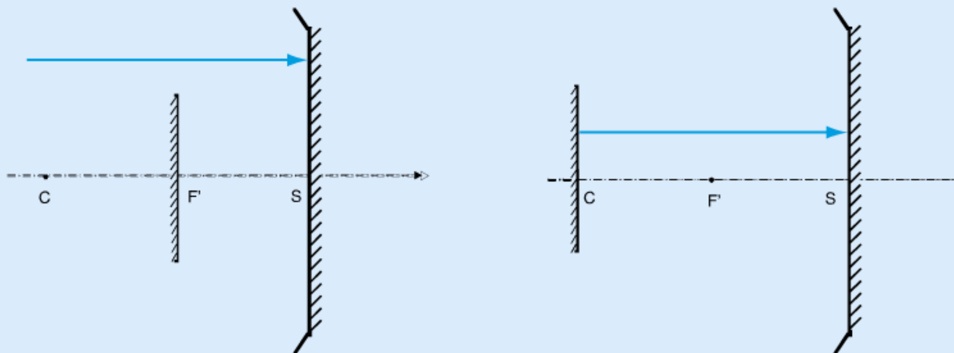


Figure 15.4

Solution

Un rayon incident (1), parallèle à l'axe optique, passe par F' après réflexion sur le miroir sphérique. Le rayon (2) se réfléchit alors sur le miroir plan en suivant la loi de réflexion de Snell-Descartes, donnant lieu au rayon (3). Deux situations se présentent

alors :

- dans le premier cas, le rayon (3) passe par le foyer F' du miroir sphérique. Le rayon (4) ressort donc du système de miroirs, parallèlement au rayon incident, symétriquement par rapport à l'axe optique (figure 15.5a) dans le sens inverse.
- dans le deuxième cas, le rayon (3) est incliné sur l'axe optique et ne passe pas par F'. Pour tracer sa réflexion, il faut considérer un rayon parallèle (3′), passant par C et coupant le plan focal en un point donné (figure 15.5b). Après réflexion, le rayon (3) donne un rayon (4) passant par ce point d'intersection. Ce dernier se réfléchit sur le miroir plan en suivant à nouveau la loi de Snell-Descartes et devient le rayon (5) qui ressort du système de miroirs, incliné par rapport à l'axe optique.

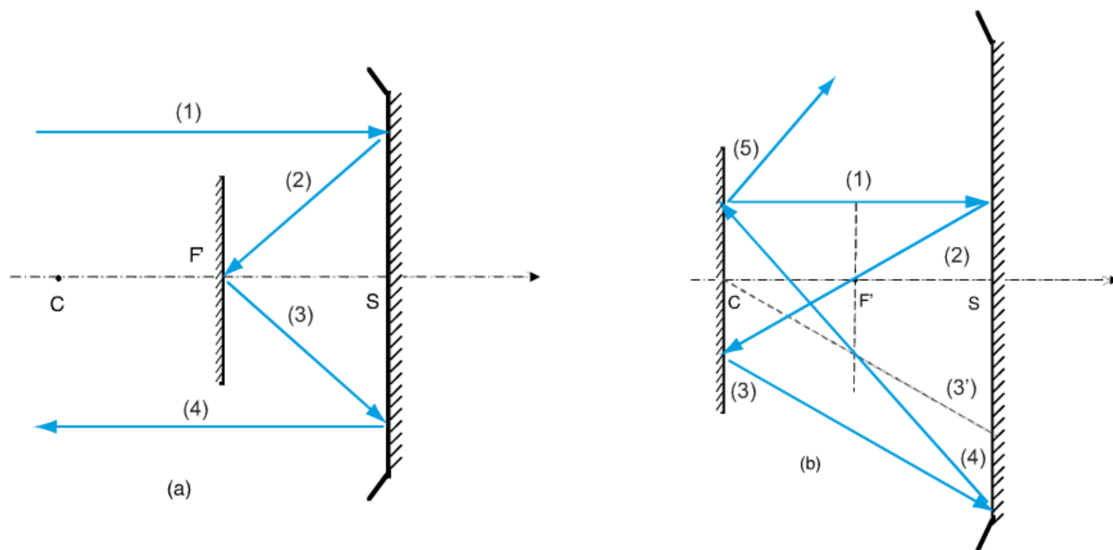


Figure 15.5

Le télescope du Pic-du-Midi

Le grand télescope du Pic-du-Midi est composé d'un miroir primaire, assimilable à un miroir sphérique de 20 m de rayon de courbure, et d'un miroir secondaire plan. On note S et O les sommets respectifs de ces deux miroirs.

1) A quelle distance d du miroir primaire faut-il placer le miroir secondaire plan pour que le foyer image du télescope F' se situe derrière le miroir primaire, à une distance e ?

2) Calculer d pour $e = 1$ m.

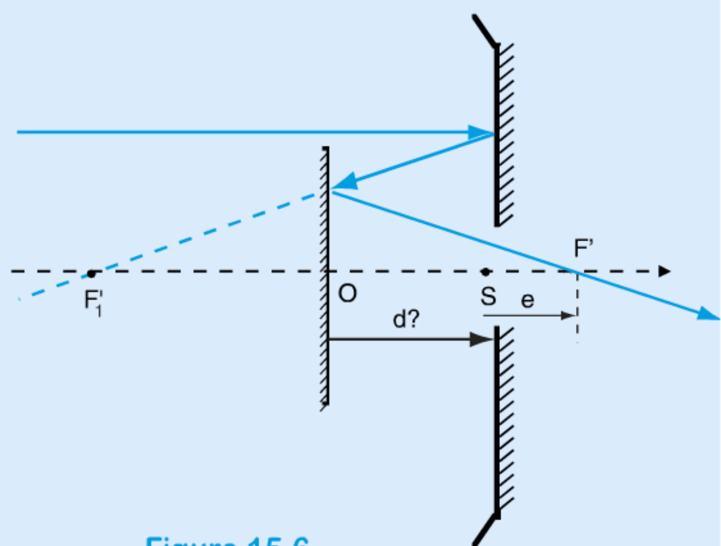


Figure 15.6

Solution

1) Le miroir sphérique a pour rayon de courbure $r = \overline{SC} = -20$ m ; son foyer est en F'_1, avec $\overline{SF'_1} = \dfrac{r}{2} = -10$ m. Un rayon incident, parallèle à l'axe principal, a son prolongement qui passe par F'_1 après réflexion sur le miroir sphérique. Soit F', le foyer du télescope, situé après ce dernier à une distance e de S. Posons $\overline{OS} = d$ et $\overline{SF'} = e$. Le miroir plan donne de F'_1 une image F', symétrique par rapport à sa surface. Cela implique que $\overline{F'_1O} = \overline{OF'} = \overline{OS} + \overline{SF'} = d + e$. On a donc $\overline{F'_1F'} = \overline{F'_1O} + \overline{OF'} = 2\overline{OF'}$ $= 2(d+e)$. Par ailleurs, $\overline{F'_1F'} = \overline{F'_1S} + \overline{SF'} = -\dfrac{r}{2} + e$. On obtient finalement que $2(d+e) = -\dfrac{r}{2} + e$, soit $d = -\dfrac{r}{4} - \dfrac{e}{2}$.

2) Si $r = -20$ m et $e = 1$ m alors $d = 5 - 0{,}5 = 4{,}5$ m.

Quel est l'effet d'un miroir déformant ?

Considérons un miroir déformant, dont le rayon de courbure peut varier continûment de $-\infty$ à $+\infty$.

1) Quelle est la nature de ce miroir quand son rayon de courbure devient infini ?

2) Avec les conventions habituelles, quel est le domaine de variation de la position d'un objet p ?

3) Exprimer p' en fonction de r et p pour r quelconque. En déduire l'expression de $\dfrac{dp'}{dr}$. Quel est son signe ?

4) Tracer p' en fonction de r pour $p = -1/2$ m. Commenter la courbe obtenue.

5) Discuter pour $p = -1/2$ m l'effet du miroir déformant en prenant successivement pour valeur de r : –2 m, –50 cm et 1 m.

Solution

1) Lorsque $r \to \pm\infty$, le miroir devient plan.

2) Si l'on se regarde dans ce miroir, on constitue un objet réel. On a donc $-\infty < p < 0$.

3) La relation de conjugaison du miroir sphérique est $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{r}$, soit $p' = \dfrac{rp}{2p - r}$.

En dérivant p' par rapport à r, à p fixé, on obtient : $\dfrac{dp'}{dr} = \dfrac{2p^2}{(2p-r)^2}$. Le signe de $\dfrac{dp'}{dr}$ est donc positif.

4) Si $p = -1/2$ m, $\dfrac{dp'}{dr} = \dfrac{1}{2(1+r)^2}$. La fonction $p'(r)$ est donc une fonction crois-

sante de r qui est représentée figure 15.7. On remarque qu'elle admet une asymptote verticale pour $r = -1$ m, cas pour lequel l'image est rejetée à l'infini.
Remarque : si $r \to \pm\infty$, le miroir devient plan et la courbe représentée figure 15.7 admet une asymptote horizontale qui fixe p' (et donc l'image) à 1/2 m du miroir. Aux abords de cette asymptote, l'image est virtuelle.

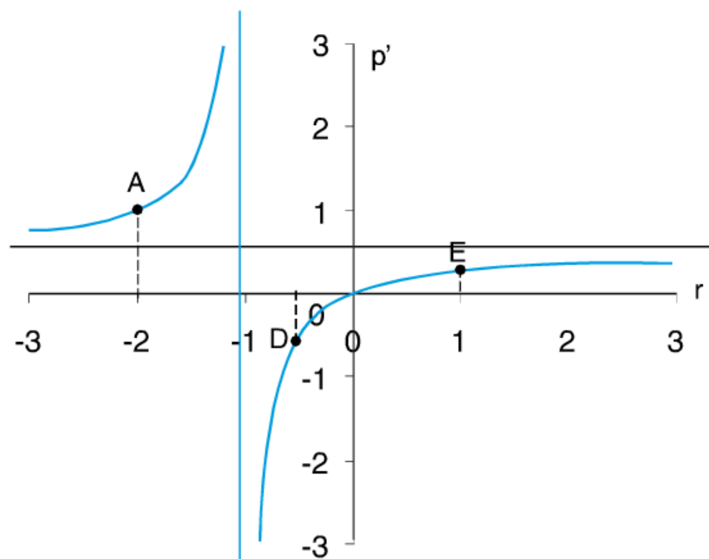


Figure 15.7

5) Si $p = -1/2$ m, selon la valeur de r, on obtient les trois situations suivantes :

- Si $r = -2$ m, $p' = +1$ m ; l'image est virtuelle, située derrière le miroir et correspond au point A indiqué sur la courbe représentée figure 15.7.
- Si $r = -1/2$ m, $p' = -1/2$ m ; $p = p' = r$, ce qui correspond au point D sur la figure 15.7. L'image est réelle, située en avant du miroir, au même endroit que l'objet.
- Si $r = +1$ m, $p' = 1/4$ m. C'est une image virtuelle correspondant au point E sur la figure 15.7.

L'effet du miroir déformant est donc de modifier la position et la nature de l'image d'un objet qui n'a pas bougé.

Construction d'images à travers un miroir sphérique

FICHE 16

I Méthode

Comme dans les fiches précédentes, on se place dans le cadre de l'approximation de Gauss. Un objet AB et son image $A'B'$ sont dans un plan perpendiculaire à l'axe principal. Ce dernier passe lui-même par le centre C et le sommet S du système étudié (Figures 16.1 à 16.3). On rappelle que la méthode de construction suppose connues les positions des foyers objet F et image F'. Rappelons que, dans le cas d'un miroir sphérique, ces deux points sont confondus et placés à mi-chemin entre le sommet S et le centre C (voir fiche 15).

À partir du point B de l'objet, on choisit deux rayons particuliers incidents, selon la même démarche que pour le dioptre sphérique (voir la fiche 11).

Si l'objet AB est réel (Figures 16.1 et 16.2), les deux rayons physiques incidents passent par B ; si l'objet est virtuel (figure 16.3), c'est le prolongement d'un ou de deux de ces rayons incidents qui passe par B.

Pour construire l'image $A'B'$ de AB nous recommandons les deux rayons incidents suivants :

- celui qui passe par le centre C du miroir, car il n'est pas dévié après réflexion ;
- celui qui est parallèle à l'axe principal du miroir car il passe par F' après réflexion.

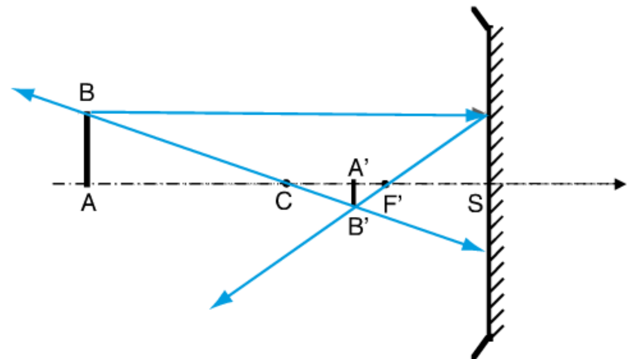


Figure 16.1

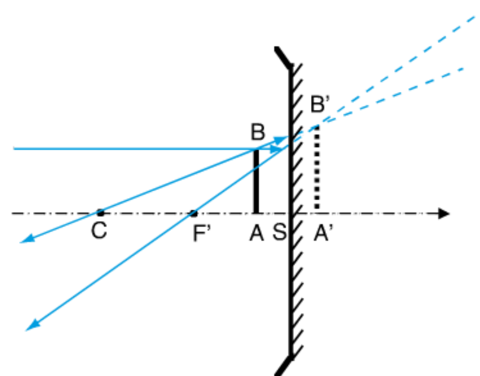


Figure 16.2

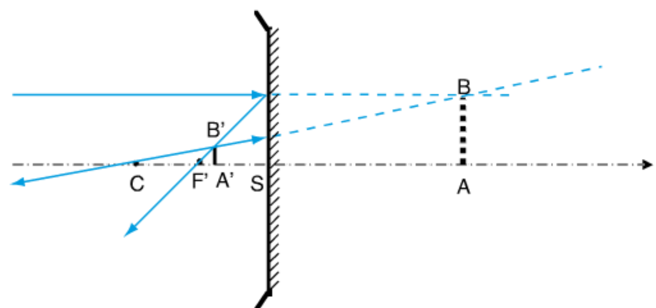


Figure 16.3

Après le miroir sphérique, les rayons ou leurs prolongements convergent en B' ; en traçant à partir de B' la perpendiculaire à l'axe optique, on obtient le point A', point conjugué du point A, et donc l'image $A'B'$.
Là encore, si B' est à l'intersection des rayons physiques, l'image $A'B'$ est réelle (figure 16.1 et 16.3) ; sinon, elle est virtuelle (figure 16.2).

II Le grandissement transversal

Pour un miroir sphérique, le grandissement transversal γ est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{p'}{p}$$

On rappelle que, si $\gamma < 0$, l'image est renversée ; si $\gamma > 0$, elle est droite. Si $|\gamma| < 1$, l'image est plus petite que l'objet (on la dit rétrécie) ; si $|\gamma| > 1$, elle est agrandie.

III Le grandissement longitudinal

Pour un miroir sphérique, le grandissement longitudinal, appelé g, s'écrit :

$$g = \frac{dp'}{dp} = -\left(\frac{p'}{p}\right)^2$$

On a donc $g = -\gamma^2$, ce qui explique qu'un objet et son image apparaissent toujours en vis-à-vis à travers un miroir sphérique. Cela explique aussi une déformation systématique de l'image d'un objet non filiforme.

Oh miroir, dis-moi qui est la plus belle !

Mélanie admire sa nouvelle robe devant un grand miroir plan qui couvre tout le mur du hall d'entrée de son immeuble (voir figure 16.4).

1) À partir d'une construction, donner la nature, la taille et la position de son image ?

2) Mélanie se trouve bien petite du haut de ses douze ans. Quelles devraient être les caractéristiques du miroir pour qu'elle apparaisse trois fois plus grande ?
Réaliser, dans ce cas, la construction.

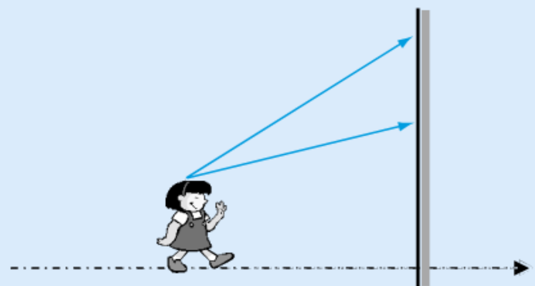


Figure 16.4

Solution

1) Mélanie placée en avant du miroir constitue un objet réel AB (Figure 16.5). Considérons deux rayons issus du haut de sa tête (point B). Les rayons incidents arrivent sur le miroir plan sous une incidence i. Selon les lois de Snell-Descartes, ils se réfléchissent en faisant un angle de réflexion avec la normale au miroir $j = i$. Leurs prolongements se croisent derrière le miroir en B', image de B dans le miroir plan. La perpendiculaire à B' coupe l'axe principal en A', permettant de déterminer l'image de Mélanie, notée $A'B'$.

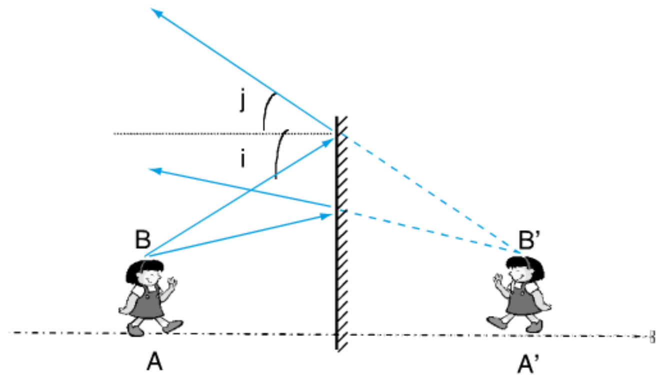


Figure 16.5

Dans cet exemple, l'image est virtuelle. Un calcul géométrique simple montre qu'elle est de la même taille que Mélanie et située à une position symétrique par rapport au plan du miroir.

2) Mélanie souhaite maintenant se voir trois fois plus grande dans le miroir. Elle constitue toujours un objet réel ($p < 0$) et on suppose que son image est virtuelle ($p' > 0$). Cela entraîne $\gamma = -\dfrac{p'}{p} = 3$ ou encore $p' = -3p$. Sachant que, par ailleurs, $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{f'}$, on trouve $f' = 3p/2$. p étant négatif, c'est aussi le cas de la distance focale f'. Le miroir sphérique doit donc être concave convergent ($r < 0$) (Figure 16.6). La Figure 16.6 présente, dans ce cas, la construction des rayons.

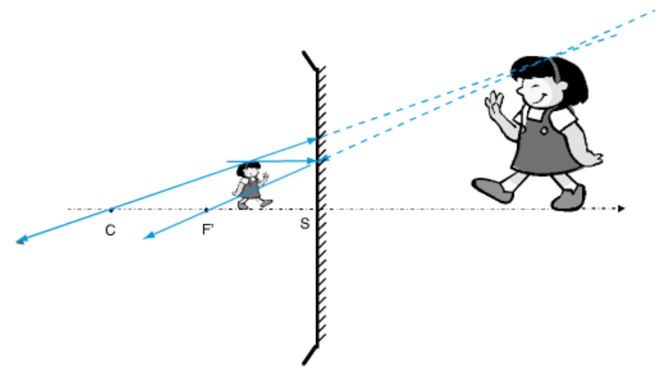


Figure 16.6

Mon œil dans le creux d'une petite cuillère en métal

Que vois-je si je place mon œil à 25 cm du creux d'une petite cuillère à café métallique ?

Solution

Le creux d'une petite cuillère métallique peut être considéré comme un miroir sphérique concave ($r < 0$), donc convergent. En plaçant mon œil à 25 cm de ce miroir, $p < 0$, je vois l'image de mon visage à l'envers ($\gamma < 0$). On remarque qu'en déterminant la taille de l'image de mon œil, connaissant celle de mon œil, je pourrais déduire la valeur de son grandissement transversal γ ainsi que sa position. Dans ce cas, la relation de conjugaison permettrait de déterminer la valeur du rayon de courbure de la cuillère.

Le miroir de maquillage

Définir la nature (rayon, concavité, vergence) de mon miroir de maquillage qui me fournit une image droite et deux fois plus grande que mon visage, placé à 20 cm du miroir.

Solution

Si l'image de mon visage est droite et deux fois plus grande, le grandissement transversal s'écrit : $\gamma = -\dfrac{p'}{p} = +2$. D'autre part, mon visage représente un objet réel, ($p = -20$ cm). La valeur de γ entraîne $p' = +40$ cm. L'image de mon visage est donc virtuelle, située derrière le miroir. Pour déduire la nature de mon miroir de maquillage, on peut utiliser sa relation de conjugaison qui s'écrit $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{r}$ soit, si les variables sont exprimées en mètre, $\dfrac{1}{0{,}4} + \dfrac{1}{-0{,}2} = \dfrac{2}{r}$. On en déduit son rayon de courbure est $r = -80$ cm. Ce miroir est donc concave et convergent.

Une cuve de viticulture

Les cuves utilisées en viticulture sont des cylindres métalliques dont la surface interne est réfléchissante. Curieux, Anthony a mis son œil au niveau de l'ouverture IJ de la cuve vide ; il a eu la surprise d'y voir son propre visage réduit (Figure 16.7).

On peut considérer que la cuve est constituée de deux miroirs sphériques concentriques de sommets S_1 et S_2 et de même rayon de courbure R.

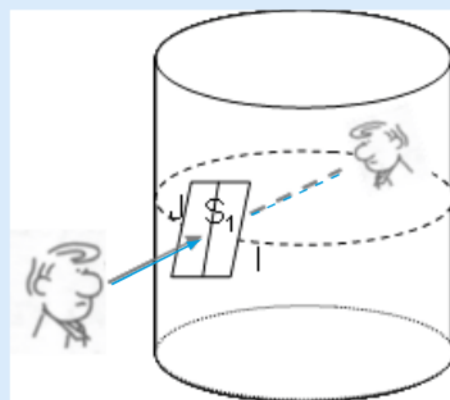


Figure 16.7

Dans cet exercice, une démarche progressive va nous permettre de construire les images successives de l'œil d'Anthony sur les parois de la cuve.

1) Un rayon issu de son œil, placé en S_1, est réfléchi par le miroir M_2 puis coupe l'axe en A_1 (Figure 16.8). Déterminer les distances algébriques $\overline{S_2A_1}$, $\overline{S_1A_1}$ puis $\overline{CA_1}$. Déduire le grandissement γ_1 existant entre S_1 et A_1.

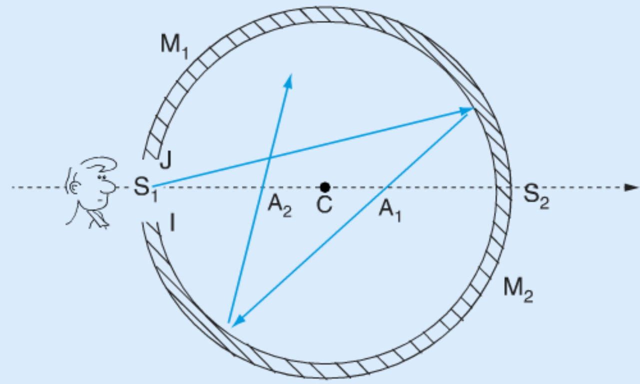


Figure 16.8

2) Le rayon se réfléchit à nouveau sur M_1 et recoupe l'axe en A_2 (Figure 16.8). Déterminer $\overline{S_1A_2}$ et $\overline{CA_2}$. En déduire le grandissement γ_2 existant entre A_1 et A_2.

3) Le rayon continue à se réfléchir alternativement sur M_2 et M_1, recoupant l'axe en A_3, A_4, A_5, A_6.... Déterminer $\overline{S_2A_3}$, $\overline{S_1A_3}$ puis $\overline{CA_3}$ et γ_3, $\overline{S_1A_4}$, $\overline{CA_4}$ et γ_4.

4) En déduire, sans démonstration, les expressions de $\overline{S_1A_n}$, $\overline{CA_n}$, et γ_n.

5) L'œil d'Anthony est au centre de l'ouverture de la cuve de largeur IJ. À l'aide des résultats précédents, calculer les tailles des images successives $\overline{A_1I_1}$, $\overline{A_2I_2}$, $\overline{A_3I_3}$...

6) Sur un schéma à l'échelle, placer les différentes images. Vérifier que I, I_1, I_2, ... sont alignés sur la droite IC.

7) Son œil voit donc des images successives de plus en plus petites. Cependant, elles sont à des distances différentes de l'ouverture et il les voit sous un angle $\theta_i \approx \dfrac{\overline{A_iI_i}}{\overline{S_1A_i}}$.

Déterminer θ_i pour les quatre premières images. Que constatez-vous pour les différents couples d'images.

8) Sur un schéma à l'échelle, dessiner :

– un rayon issu de I, qui se réfléchit sur M_2 et arrive dans l'œil d'Anthony.

– un rayon issu de I, qui se réfléchit deux fois (sur M_2 puis M_1) en passant par I_1, I_2 puis arrive dans l'œil.

D'après le dessin, comment apparaissent les images $\overline{I_1J_1}$ puis $\overline{I_2J_2}$?

Solution

1) A_1 est l'image de S_1 à travers le miroir M_2 de sommet S_2 et de rayon de courbure $r_2 = \overline{S_2C} = -R$. Par ailleurs, $p_1 = \overline{S_2S_1} = -2R$. La relation de conjugaison du miroir $\dfrac{1}{p'_1} + \dfrac{1}{p_1} = \dfrac{2}{r_2}$ s'écrit encore $\dfrac{1}{p'_1} + \dfrac{1}{(-2R)} = \dfrac{2}{(-R)}$, et donne $p'_1 = \overline{S_2A_1} = -\dfrac{2R}{3}$. On en déduit que $\overline{S_1A_1} = \overline{S_1S_2} + \overline{S_2A_1} = 2R - \dfrac{2R}{3} = \dfrac{4R}{3}$, et que

$\overline{CA_1} = \overline{CS_1} + \overline{S_1A_1} = -R + \dfrac{4R}{3} = \dfrac{R}{3}$. Enfin, $\gamma_1 = -\dfrac{p_1'}{p_1} = -\dfrac{\overline{S_2A_1}}{\overline{S_2S_1}} = -\dfrac{1}{3}$.

2) A_2 est l'image de A_1 à travers le miroir M_1, de sommet S_1 et de rayon de courbure $r_1 = \overline{S_1C} = R$. Sachant que $p_2 = \overline{S_1A_1} = \dfrac{4R}{3}$, la relation de conjugaison du miroir $\dfrac{1}{p_2'} + \dfrac{1}{p_2} = \dfrac{2}{r_1}$ donne $\dfrac{1}{p_2'} + \dfrac{3}{4R} = \dfrac{2}{R}$. On a donc $p_2' = \overline{S_1A_2} = \dfrac{4R}{5}$, $\overline{CA_2} = \overline{CS_1}$ $+\overline{S_1A_2} = -R + \dfrac{4R}{5} = -\dfrac{R}{5}$ et $\gamma_2 = -\dfrac{p_2'}{p_2} = -\dfrac{3}{5}$.

3) A_3 est l'image de A_2 à travers le miroir M_2. $p_3 = \overline{S_2A_2} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A_2}$ $= -2R + \dfrac{4R}{5} = -\dfrac{6R}{5}$. La relation de conjugaison s'écrit $\dfrac{1}{p_3'} + \dfrac{1}{p_3} = \dfrac{2}{r_2}$ et donne $\dfrac{1}{p_3'} - \dfrac{5}{6R} = \dfrac{2}{(-R)}$, soit $p_3' = \overline{S_2A_3} = -\dfrac{6R}{7}$. $\overline{CA_3} = \overline{CS_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2A_3} =$ $-R + 2R - \dfrac{6R}{7} = \dfrac{R}{7}$. Enfin, $\gamma_3 = -\dfrac{p_3'}{p_3} = -\dfrac{5}{7}$.

A_4 est l'image de A_3 à travers le miroir M_1. $p_4 = \overline{S_1A_3} = \overline{S_1S_2} + \overline{S_2A_3}$ $= 2R - \dfrac{6R}{7} = \dfrac{8R}{7}$. La relation de conjugaison s'écrit $\dfrac{1}{p_4'} + \dfrac{1}{p_4} = \dfrac{2}{r_1}$ et donne $\dfrac{1}{p_4'} - \dfrac{7}{8R} = \dfrac{2}{R}$, soit $p_4' = \overline{S_1A_4} = \dfrac{8R}{9}$, $\overline{CA_4} = \overline{CS_1} + \overline{S_1A_4} = -R + \dfrac{8R}{9} = -\dfrac{R}{9}$.

Enfin, $\gamma_4 = -\dfrac{p_4'}{p_4} = -\dfrac{7}{9}$.

4) Sans démonstration, on peut dresser le tableau 16.1 :

Tableau 16.1

Numéro i	Image A_i	$\overline{S_pA_i}$ (p = 1 ou 2)	$\overline{CA_i}$	γ_i	γ_{total}	$\theta_i(x\ \overline{S_1I}/R)$ (question 7)
1	A_1	(p = 2) $4R/3$	R/3	– 1/3	– 1/3	– 1/4
2	A_2	(p = 1) $4R/5$	– R/5	– 3/5	1/5	1/4
3	A_3	(p = 2) $8R/7$	R/7	– 5/7	– 1/7	– 1/8
4	A_4	(p = 1) $8R/9$	– R/9	– 7/9	1/9	1/8
5	A_5	(p = 2) $12R/11$	R/11	– 9/11	– 1/11	– 1/12
...	...	...	...	...	...	...
i impair i = 1, 3, 5, ...	A_i	(p = 2) $\dfrac{2(i+1)R}{(2i+1)}$	$\dfrac{R}{(2i+1)}$	$\dfrac{-(2i-1)}{(2i+1)}$	$\dfrac{-1}{(2i+1)}$	$\dfrac{-1}{2(i+1)}$
i pair i = 2, 4, 6, ...	A_i	(p = 1) $\dfrac{(2nR)}{(2i+1)}$	$\dfrac{-R}{(2i+1)}$	$\dfrac{-(2i-1)}{(2i+1)}$	$\dfrac{1}{(2i+1)}$	$\dfrac{1}{2i}$

5) Pour calculer la taille des images, il faut prendre en compte les grandissements successifs, on a : $\overline{A_1I_1} = \gamma_1\overline{A_1I_1} = -\frac{1}{3}\overline{S_1I}$ et on pose $\gamma_{total} = \gamma_1 = -\frac{1}{3}$,
$\overline{A_2I_2} = \gamma_2\overline{A_1I_1} = -\frac{3}{5}\overline{A_1I_1} = \frac{I}{5}\overline{S_1I}$ et on pose $\gamma_{total} = \gamma_2\gamma_1 = -\frac{3}{5}$,
$\overline{A_3I_3} = \gamma_3\overline{A_2I_2} = -\frac{5}{7}\overline{A_2I_2} = \frac{1}{7}\overline{S_1I}$ et on pose $\gamma_{total} = \gamma_3\gamma_2\gamma_1 = -\frac{1}{7}$.
Tous les grandissements transversaux sont reportés tableau 16.1.

6) Les points I, I_1, I_2,..... sont alignés sur une droite passant par I et C (Figure 16.9).

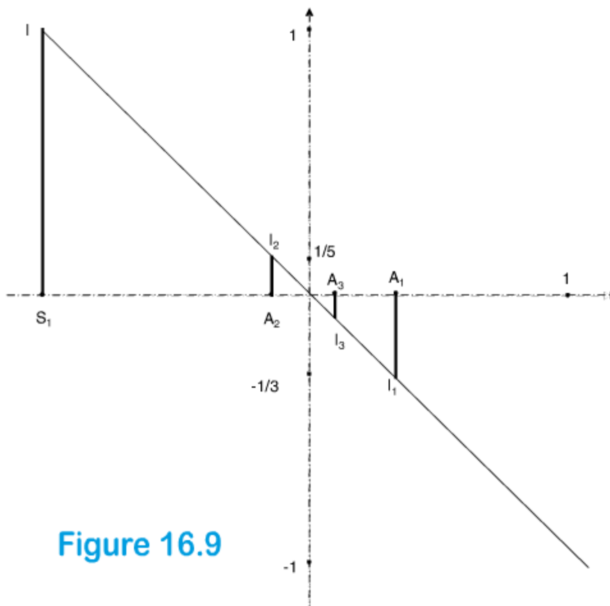


Figure 16.9

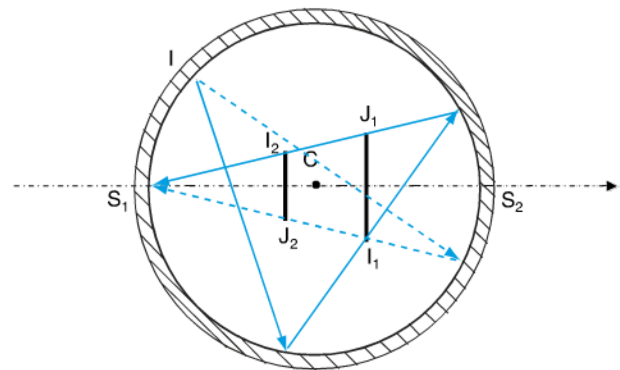


Figure 16.10

7) D'après les tailles des images et les distances calculées et reportées tableau 16.1, on trouve $\theta_1 = \frac{\overline{A_1I_1}}{\overline{S_1A_1}} = \frac{-\frac{\overline{S_1I}}{3}}{\frac{4R}{3}} = -\frac{\overline{S_1I}}{4R}$; $\theta_2 = \frac{\overline{A_2I_2}}{\overline{S_1A_2}} = \frac{\frac{\overline{S_1I}}{5}}{\frac{4R}{5}} = \frac{\overline{S_1I}}{4R}$;
$\theta_3 = \frac{\overline{A_3I_3}}{\overline{S_1A_3}} = \frac{-\frac{\overline{S_1I}}{7}}{\frac{8R}{7}} = -\frac{\overline{S_1I}}{8R}$; $\theta_4 = \frac{\overline{A_4I_4}}{\overline{S_1A_4}} = \frac{\frac{\overline{S_1I}}{9}}{\frac{8R}{9}} = \frac{\overline{S_1I}}{8R}$.

8) La Figure 16.10 montre le cheminement des rayons au fur et à mesure des réflexions sur les faces internes de la cuve. Chaque couple (A_1, A_2), (A_3, A_4), ... est vu sous un même angle apparent tout en étant situé de part et d'autre de l'axe optique. Anthony voit donc deux images superposées : la première, $\overline{I_1J_1}$ est à l'endroit et la deuxième, $\overline{I_2J_2}$, à l'envers. Les autres images ne sont pas visibles en raison du faible pouvoir réflecteur de la surface métallique.

La réflexion partielle sur un dioptre

I Contexte

Lors de l'étude du dioptre plan (voir fiche 2), nous avons introduit le fait qu'un rayon incident se partageait en deux rayons distincts : le rayon réfléchi qui ne change pas de milieu et le rayon réfracté qui se propage dans le deuxième milieu ; ces deux rayons restent dans le plan d'incidence.

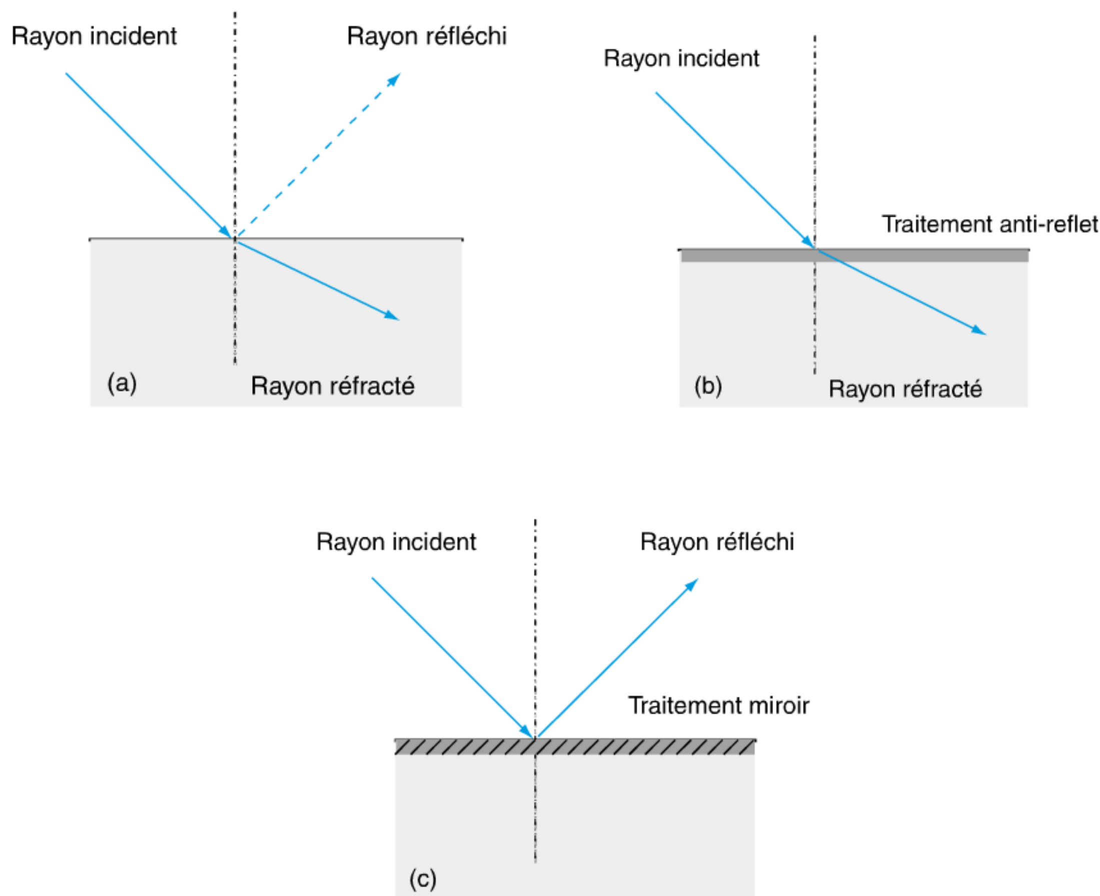


Figure 17. 1

D'une manière générale, la surface d'un dioptre transparent présente toujours une réflexion partielle que l'on a jusqu'ici ignorée en raison de sa faible intensité. En effet, le coefficient de réflexion, rapport de l'intensité du rayon réfléchi sur celle du rayon

incident, est en général de l'ordre de 2 à 4 %. C'est pourquoi le rayon réfléchi est souvent représenté en pointillés (Figure 17.1a) s'il est considéré.
Cependant, il est possible de traiter la surface du dioptre au moyen d'un dépôt anti-reflet qui supprime alors le rayon réfléchi (Figure 17.1b).
A l'inverse, on peut appliquer un traitement à la surface du dioptre de telle sorte qu'il se comporte comme un miroir et que l'intensité du rayon incident soit entièrement reportée sur le rayon réfléchi. Dans ce cas c'est le rayon réfracté qui disparaît (Figure 17.1c).
On propose dans cette fiche une étude plus particulière d'un rayon réfléchi par un dioptre. On est toujours dans le cadre de l'approximation de Gauss. Cette étude n'a qu'un faible intérêt dans le cas des dioptres transparents, mais devient primordiale si le dioptre a une face semi-réfléchissante (avec un coefficient de réflexion supérieur à 10 %), voire complètement réfléchissante. Dans ce dernier cas, la face du dioptre sphérique devient un miroir sphérique. (Figure 17.2).

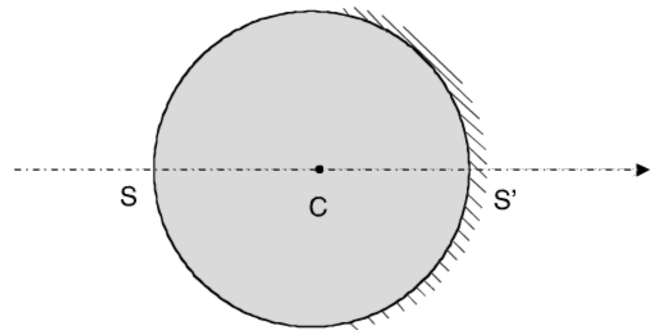


Figure 17.2

II Méthode d'étude

- **Rayons réfractés par le dioptre**

L'étude des rayons réfractés se fait en appliquant les formules du dioptre développées dans la fiche 10 et les méthodes de constructions développées fiches 11 à 13.

- **Rayons réfléchis sur le dioptre**

Etudier les rayons réfléchis revient à considérer des rayons réfléchis par un miroir sphérique. Il suffira donc d'appliquer les formules du miroir sphérique (voir fiche 15). Pour les méthodes de construction d'images, on suivra les instructions de la fiche 16.

Jeux d'images dans mon bocal !

Pierre (situé dans un milieu d'indice 1) regarde un poisson dans son bocal dont les parois sont semi-réfléchissantes. L'indice de l'eau du bocal est égal à 4/3. Pierre voit

donc l'image du poisson à travers la surface du dioptre sphérique constitué par le bocal, mais aussi l'image de son œil par réflexion sur la paroi extérieure du bocal qui constitue également un miroir sphérique (Figure 17.3).
Avec les indications de la figure 17.3, positionner O' et P', images respectives de l'œil de Pierre et du poisson. Que constatez-vous ?

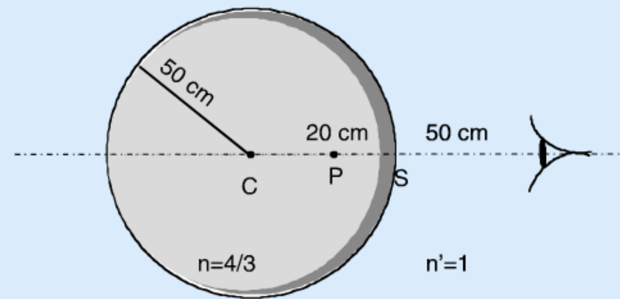


Figure 17.3

Solution

L'image de l'œil de Pierre à travers le miroir sphérique de sommet S est donnée par la relation de conjugaison $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r}$; l'axe principal est orienté de droite à gauche. Le rayon de courbure du miroir est $r = 50$ cm et la relation de conjugaison s'écrit encore $\frac{1}{p'} + \frac{1}{(-50)} = \frac{2}{50}$, ce qui permet d'obtenir $p' = 16{,}67$ cm. L'image de l'œil de Pierre à travers le miroir sphérique est donc située dans l'eau, à 16,67 cm à gauche du sommet S du bocal (figure 17.3).
L'image du poisson à travers le dioptre sphérique de sommet S est donnée par la relation de conjugaison $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r}$, avec l'axe principal orienté de gauche à droite, $n' = 1$ et $n = 4/3$. Le rayon de courbure du dioptre sphérique est $r = -50$ cm et la relation de conjugaison s'écrit $\frac{1}{p'} - \frac{4/3}{(-20)} = \frac{1 - 4/3}{(-50)}$, d'où $p' = -16{,}67$ cm.
L'image du poisson à travers le dioptre sphérique est donc située à 16,67 cm à gauche du sommet S du bocal (figure 17.3).
Pierre voit donc l'image du poisson et celle de son œil exactement superposées.

La boule semi-argentée

Une boule de verre, argentée sur l'une de ses faces, de rayon R et d'indice $n = 1{,}5$, est plongée dans l'air d'indice égal à 1 (Figure 17.4).
1) Un rayon arrive en I, parallèlement à l'axe optique, sur la première face : placer les foyers F et F' de la première face de la boule. Si la deuxième face n'existait pas, où le rayon couperait-il l'axe ?

2) Le rayon se réfléchit en I' sur le miroir concave de sommet S', et recoupe l'axe optique en A'. Déterminer la position de A' en calculant $\overline{S'A'}$.

3) Le rayon se réfracte alors en I'' sur le dioptre sphérique et ressort de la boule. Son prolongement coupe l'axe optique en A''. Déterminer la position de A'' en calculant $\overline{SA''}$ (attention à l'ordre des indices n et n').

4) Placer les points F', A' et A'' sur une figure et dessiner le cheminement du rayon à travers toute la boule.

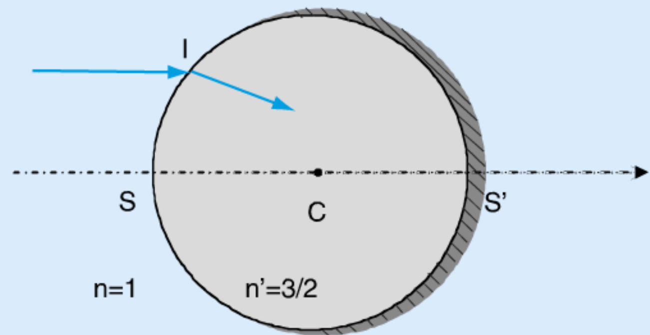


Figure 17.4

Solution

1) La première face est un dioptre sphérique de sommet S et de rayon de courbure $\overline{SC} = R$; elle sépare des milieux d'indices $n = 1$ et $n' = 3/2$. Les distances focales image et objet sont respectivement $f' = \overline{SF'} = \dfrac{n'\overline{SC}}{n' - n} = \dfrac{3/2R}{3/2 - 1} = 3R$ et $f = \overline{SF} = \dfrac{-n\overline{SC}}{n' - n} = \dfrac{-R}{3/2 - 1} = -2R$. Si la deuxième face n'existait pas, le rayon, après traversée du dioptre constitué par la face d'entrée de la boule, couperait l'axe en F', situé à $3R$ à droite du sommet S (voir Figure 17.5).

2) F' et A' sont conjugués à travers le miroir sphérique de sommet S' dont le rayon de courbure algébrique est $\overline{S'C} = -R$. D'autre part, $\overline{S'F'} = \overline{S'S} + \overline{SF'} = -2R + 3R = R$. Si on pose $p' = \overline{S'A'}$, la relation de conjugaison du miroir sphérique s'écrit : $\dfrac{1}{\overline{S'A'}} + \dfrac{1}{\overline{S'F'}} = \dfrac{2}{\overline{S'C}}$, soit encore $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{R} = -\dfrac{2}{R}$; on obtient $p' = \overline{S'A'} = -\dfrac{R}{3}$ (Figure 17.5).

3) A'' est l'image de A' à travers le dioptre sphérique de sommet S et $\overline{SA'} = \overline{SS'} + \overline{S'A'} = 2R - \dfrac{R}{3} = \dfrac{5R}{3}$. Le dioptre sphérique a pour rayon de courbure $\overline{SC} = R$; en respectant soigneusement l'ordre des indices ($n = 3/2$ et $n' = 1$), sa relation de conjugaison s'écrit : $\dfrac{n'}{\overline{SA''}} - \dfrac{n}{\overline{SA'}} = \dfrac{n' - n}{\overline{SC}}$ soit encore, si $p'' = \overline{SA''}$, $\dfrac{1}{p''} - \dfrac{3/2}{5R/3} = \dfrac{1 - 3/2}{R}$. On obtient ainsi $p'' = \overline{SA''} = \dfrac{5R}{2}$ (Figure 17.5).

4) Sur la figure 17.5, apparaissent les points F', A' et A'' sur l'axe principal. Le cheminement du rayon à travers la boule est aussi indiqué.

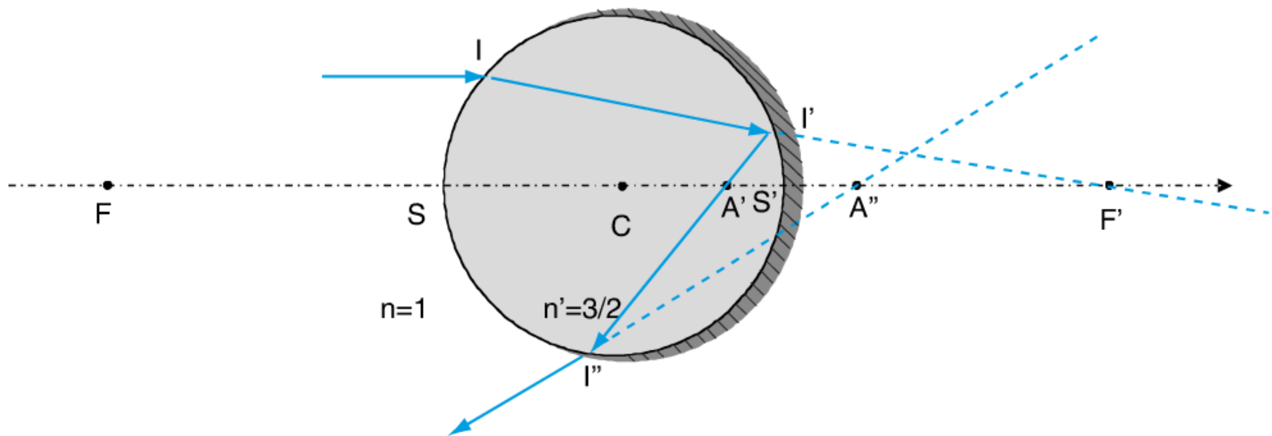


Figure 17.5

Le catadioptre

Un catadioptre est un dispositif composé d'un dioptre sphérique et d'un miroir sphérique de rayons respectifs $r_1 = \overline{S_1C_1}$ et $r_2 = \overline{S_2C_2}$. Son indice de réfraction est $n = 1{,}5$ et il baigne dans l'air d'indice égal à 1.
Un rayon arrive sur la face du catadioptre de sommet S_1 parallèlement à l'axe principal $\overline{S_1S_2}$ (Figure 17.6).

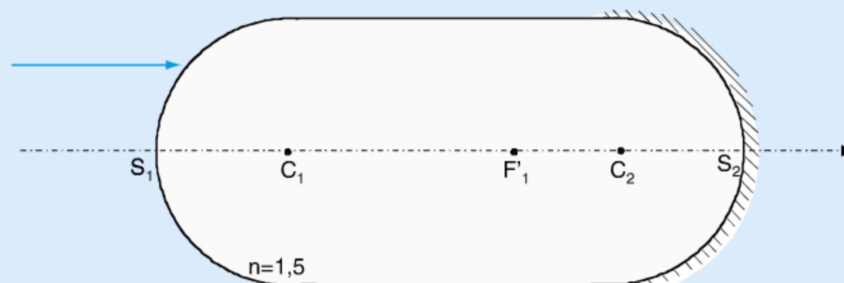


Figure 17.6

1) Tracer la marche du rayon incident dans le dispositif.
2) Comment faut-il placer le miroir sphérique pour que le rayon émergent soit parallèle et confondu avec le rayon incident ?
3) Dans ce dernier cas, exprimer les distances $\overline{S_1S_2}$ et $\overline{C_1C_2}$.

Solution

1) La figure 17.7 donne la marche du rayon incident sur la face du catadioptre de sommet S_1 parallèlement à l'axe principal $\overline{S_1S_2}$

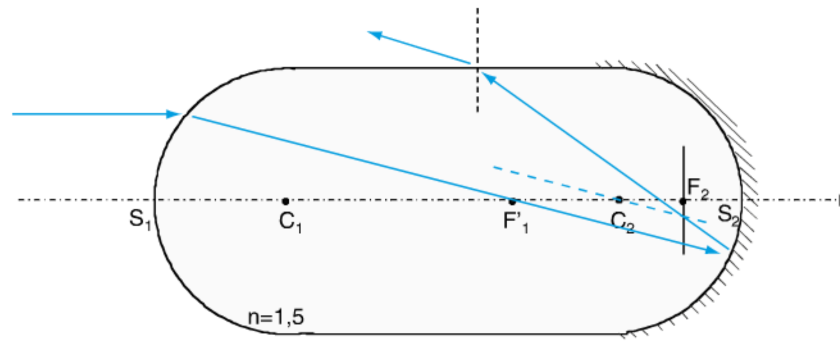


Figure 17.7

2) Pour que le rayon émergent soit confondu avec le rayon incident, il faut qu'il revienne sur ses pas après réflexion sur le miroir sphérique de sommet S_2. Ceci n'est possible que si, après avoir traversé le dioptre sphérique de sommet S_1, il passe par le centre C_2 du miroir sphérique.
D'autre part, le rayon incident étant parallèle à l'axe principal, il passe nécessairement par F_1', foyer image du dioptre sphérique de sommet S_1.
Le rayon émergent sera donc confondu avec le rayon incident uniquement si F_1' et C_2 sont confondus (Figure 17.8).

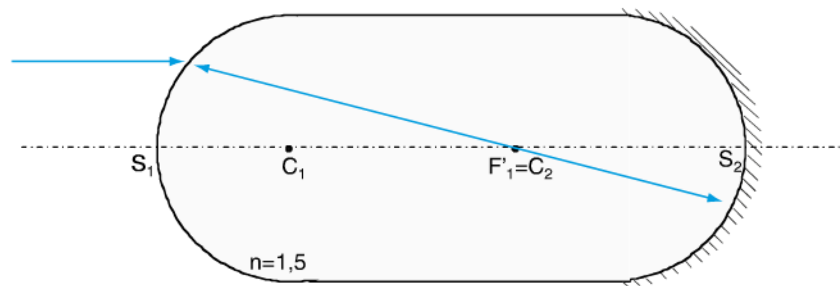


Figure 17.8

3) On a d'une part $F_1' \equiv C_2$ et d'autre part $\overline{S_1F_1'} = \dfrac{n\overline{S_1C_1}}{n-1} = \dfrac{nr_1}{n-1}$. Comme C_2 et F_1' sont confondus, $\overline{S_1C_2} = \dfrac{nr_1}{n-1}$. On a donc : $\overline{S_1S_2} = \overline{S_1C_2} + \overline{C_2S_2} = \dfrac{nr_1}{n-1} - r_2$ et $\overline{C_1C_2} = \overline{C_1S_1} + \overline{S_1C_2} = -r_1 + \dfrac{nr_1}{n-1} = \dfrac{r_1}{n-1}$.

La lentille mince

FICHE 18

Une lentille est un milieu transparent, homogène, d'indice de réfraction n et limité par deux dioptres dont l'un au moins est sphérique ; l'une des deux faces peut donc être plane.
Nous ne considérerons ici que le cas où les centres de courbure C_1 et C_2 des deux dioptres sont alignés sur l'axe optique, formant ainsi un système centré. L'axe optique, comme le sens de propagation de la lumière, est orienté en général de gauche à droite. Il coupe la surface des deux dioptres en leurs sommets S_1 et S_2.
Une **lentille est dite mince** si son épaisseur $e = \overline{S_1S_2}$ est négligeable devant la différence des rayons de courbure de ses deux faces, formées par les dioptres qui la délimitent ; on a alors $|\overline{S_1C_1} - \overline{S_2C_2}| \gg e$.
Nous ne traiterons ici que les lentilles minces ; on peut alors considérer que S_1 et S_2 sont confondus en un point noté S, appelé le sommet de la lentille. Par ailleurs, nous n'étudierons dans cette fiche que les lentilles minces, d'indice n, entourées de deux milieux identiques, d'indice $n' = 1$.

1 Lentille convergente ou divergente

Si l'on étudie l'ensemble des combinaisons possibles de deux dioptres constituant une lentille mince et dont l'un au plus est plan, on ne trouve que deux familles de lentilles minces : les lentilles **convergentes**, dont les bords sont plus minces que le centre, et les lentilles **divergentes**, dont les bords sont plus épais que le centre. La Figure 18.1 présente le symbole utilisé pour les représenter. S, sommet de la lentille est toujours sur l'axe optique.

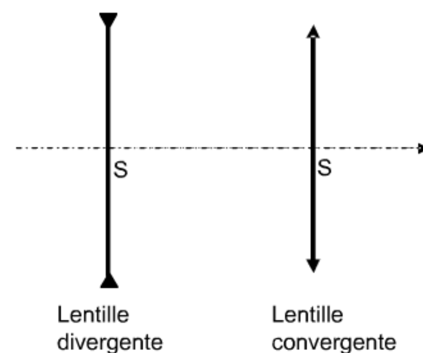


Figure 18.1

II La relation de conjugaison

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, un point objet A correspond à un point image unique, noté A', dit conjugué de A. Pour une lentille mince d'indice n, la relation de conjugaison relie la position d'un objet ponctuel A à celle de son image A', tous deux positionnés sur l'axe principal. Elle s'écrit :

$$\boxed{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}$$

où $p = \overline{SA}$ et $p' = \overline{SA'}$. $r = \overline{S_1C_1} = \overline{SC_1}$ et $r' = \overline{S_2C_2} = \overline{SC_2}$ sont respectivement les rayons de courbure de la face d'entrée et de sortie de la lentille mince.

III La vergence

$$\boxed{\phi = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)}$$

est la vergence de la lentille mince. On l'exprime en m^{-1} (ce qui impose que r et r' soient en m). Cette unité est aussi appelée dioptrie, de symbole δ. ($1\ \delta = 1\ m^{-1}$).

- Si la lentille mince est convergente, $\phi > 0$;
- au contraire, si la lentille mince est divergente, $\phi < 0$.

IV Les foyers

Une lentille mince, d'indice n et de rayons de courbure r et r' fixés, possède deux points fixes repérés sur l'axe principal par F et F' (Figure 18.2) :

- F est le foyer objet. C'est la position d'un objet dont l'image est rejetée à l'infini.
- F' est le foyer image. C'est la position d'une image quand l'objet est situé à l'infini.

Les foyers F et F' sont deux points conjugués ; leur position sur l'axe principal est repérée par rapport au sommet S de la lentille mince par les distances algébriques $f = \overline{SF}$ et $f' = \overline{SF'}$. Ces deux quantités sont respectivement appelées distance focale objet et distance focale image. Pour une lentille mince, on a :

$$\boxed{f = \overline{SF} = -\phi \quad \text{et} \quad f' = \overline{SF'} = \phi}$$

Ainsi pour une lentille mince $\dfrac{f'}{f} = -1$. Les deux foyers sont donc toujours symétriques par rapport au sommet S de la lentille (Figure 18.2).

- Pour une lentille mince convergente, $f' > 0$; le point F' est donc à droite du sommet S et F est à gauche. Pour une lentille mince divergente, au contraire, $f' < 0$; le point F' est donc à gauche du sommet S et F à droite.
- Les plans passant par F et F', perpendiculaires à l'axe principal, sont les plans focaux de la lentille mince (Figure 18.2).

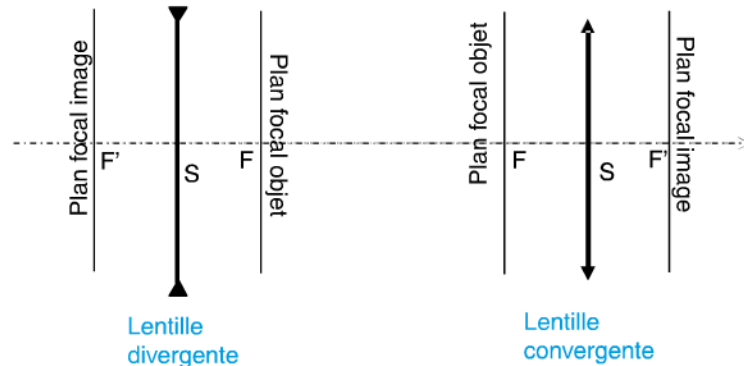


Figure 18.2

V Autres formes de la relation de conjugaison

Si l'on exprime la relation de conjugaison de la lentille mince à partir de ses distance focales, on a :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$$

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \qquad \text{(Relation de Descartes)}$$

$$ff' = (p - f)(p' - f') \quad \text{(Relation de Newton)}$$

Lentille convergente ou divergente ?

Comment présumer de la nature (convergente ou divergente) d'une lentille mince d'indice de réfraction n ?

Solution

Une lentille est un milieu transparent, homogène, limité par deux dioptres.
Si l'on dessine les différentes combinaisons de deux dioptres réalisables dans le plan d'incidence (Figures 18.3), les lois de Snell-Descartes, appliquées à chaque interface rencontrée, montrent qu'à la sortie d'une lentille convergente, un rayon incident parallèle coupe l'axe principal. Au contraire, il s'en éloigne après une lentille divergente.
On peut constituer au total huit combinaisons différentes (Figures 18.3). On montre qu'une lentille convergente est toujours plus mince au bord qu'au centre situé en S

(Figure 18.3a). Au contraire, une lentille divergente présente toujours des bords plus épais (Figure 18.3b).

Dioptre 1 $r_1 = \overline{S_1C_1}$	Dioptre 2 $r_2 = \overline{S_2C_2}$	Coupe de la lentille dans le plan principal	Nom de la lentille
$r_1 > 0$	$r_2 > 0$ $r_2 > r_1$		Ménisque à bords minces
$r_1 > 0$	$r_2 < 0$		Biconvexe
$r_1 > 0$	$r_2 \rightarrow \infty$		Convexe-plan
$r_1 \rightarrow \infty$	$r_2 < 0$		Plan-convexe

(a) lentilles convergentes

Dioptre 1 $r_1 = \overline{S_1C_1}$	Dioptre 2 $r_2 = \overline{S_2C_2}$	Coupe de la lentille dans le plan principal	Nom de la lentille
$r_1 < 0$	$r_2 > 0$		Ménisque à bords minces
$r_1 < 0$	$r_2 < 0$ $\lvert r_2 \rvert > \lvert r_1 \rvert$		Biconvexe
$r_1 < 0$	$r_2 \rightarrow \infty$		Convexe-plan
$r_1 \rightarrow \infty$	$r_2 > 0$		Plan-convexe

(b) lentilles divergentes

Figure 18.3

Lentille plan concave

On fabrique une lentille dans un verre classique dont les caractéristiques ont été déterminées à partir de mesures effectuées avec un prisme d'angle $A = 60°$ et de même indice n que la lentille.

1) On mesure la déviation minimale pour la longueur d'onde jaune $D_j = 51°48'$. Calculer à 10^{-4} près l'indice de réfraction du verre à cette longueur d'onde.

2) On fabrique avec ce verre une lentille plan-concave (Figure 18.4) dont la vergence dans le jaune est égale à 1 dioptrie. Calculer sa distance focale image. Cette lentille mince est-elle convergente ou divergente pour la longueur d'onde jaune ?

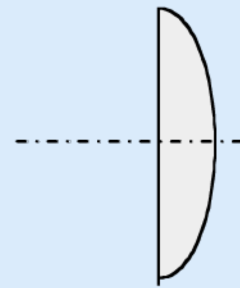


Figure 18.4

3) Déduire le rayon de courbure de sa deuxième face.

4) Cette même étude, réalisée avec une longueur d'onde rouge conduirait-elle aux mêmes caractéristiques ? Expliquer. En déduire la loi de variation de la distance focale image d'une lentille avec la longueur d'onde.

Solution

1) Au minimum de déviation, $A = 2r$, où r est l'angle de réfraction à l'intérieur du prisme, et A l'angle du prisme. D'autre part, la déviation minimale pour la longueur d'onde jaune est $D_j = 2i - A$, où i est l'angle d'incidence sur la face d'entrée du prisme. C'est aussi, à la déviation minimale, l'angle de sortie du prisme. Si n_j est l'indice de réfraction du prisme pour la longueur d'onde jaune, $\sin i = n_j \sin r$. On obtient finalement que $n_j = \dfrac{\sin \dfrac{D_j + A}{2}}{\sin \dfrac{A}{2}}$. Avec $D_j = 51°48' = 51{,}8°$, l'application numérique donne $n_j = 1{,}6561$.

2) La relation entre la vergence et la distance focale image est $\phi_j = \dfrac{1}{f'_j}$. Si $\phi_j = 1\ \text{m}^{-1}, f'_j = \dfrac{1}{\phi} = 1$ m. La vergence, et par conséquent la distance focale image de la lentille étudiée, sont positives ; la lentille est donc convergente pour la longueur d'onde jaune.

3) On a $\dfrac{1}{f'_j} = (n_j - 1)\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r'}\right)$. La première face étant plane, $r = \infty$, ce qui donne pour le rayon de courbure de la deuxième face $r' = -\dfrac{f'_j}{n_j - 1} = -1{,}5241$ m.

4) Une connaissance précise de n_j et de f'_j a permis de connaître r' qui ne dépend évidemment pas de la longueur d'onde. Par contre, si l'on travaillait avec une longueur d'onde rouge, l'indice, n_r, et donc la distance focale image, f'_r, seraient aussi différents. On sait que la longueur d'onde rouge est plus grande que la jaune, ($\lambda_r > \lambda_j$). Par ailleurs, l'indice de réfraction diminue quand la longueur d'onde augmente ($n_r < n_j$). Les rayons de courbure r et r' étant fixes, on en déduit que $f'_j < f'_r$. Plus généralement, on peut dire que la distance focale d'une lentille convergente diminue quand la longueur d'onde du faisceau qui la traverse augmente.

Principe de fonctionnement du projecteur de diapositives

On considère un projecteur de diapositives, assimilé à une lentille mince convergente. Quel est son principe de fonctionnement ?

Solution

L'objectif d'un projecteur de diapositives, assimilé à une lentille mince convergente, est utilisé de manière à donner d'un objet réel ($p < 0$) (la diapositive) une image réelle ($p' > 0$) afin de la projeter sur un écran. La relation de conjugaison de la lentille mince, $\dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{f'} = -\dfrac{1}{f}$, donne $p' = -\dfrac{pf}{p-f}$. L'image est donc réelle si l'objet est placé en avant du foyer objet de la lentille ($p < f$), avec p et f négatifs, ce qui s'écrit aussi $|p| > |f|$. On peut montrer c'est la seule possibilité de fonctionnement.

Dans des conditions classiques d'utilisation d'un projecteur de diapositives, l'écran est généralement placé à une distance fixe de l'appareil, représentée par la distance $\overline{AA'} > 0$. Pour que l'image soit nette sur l'écran, il faut que les positions de la diapositive dans le projecteur, p, et de l'écran, p', vérifient la relation de conjugaison de la lentille mince. Pour y parvenir on peut soit déplacer l'écran, soit utiliser un réglage fin de la position de la lentille (on parle de l'ajustement du « focus »).

Le tirage d'une lentille mince

Une lentille mince convergente, d'indice $n = 1{,}5$, possède une face sphérique de rayon de courbure $r > 0$ et une face plane (Figure 18.5). On place un objet réel à une distance p de cette lentille.

1) Donner l'expression de la position de l'image, notée p', en fonction de p et r. Quelle est sa nature ?

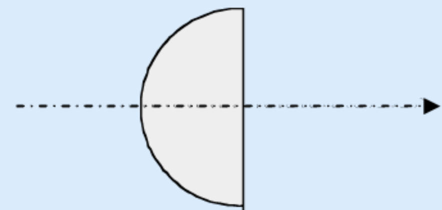


Figure 18.5

2) On veut connaître le tirage de cette lentille. Pour cela, on va regarder l'effet sur la position de l'image p' d'une erreur sur la mesure du rayon de courbure r ou sur la position de l'objet p. Calculer p' à 10^{-3} près dans les deux cas a) et b) suivants :
Cas a) : $r = 1$ m et $p = -1{,}5$ m (valeurs de référence) ; puis $r = 1$ m et $p = -1{,}51$ m (erreur sur p) ; $r = 1{,}01$ m et $p = -1{,}5$ m (erreur sur r)
Cas b) : $r = 1$ m et $p = -1{,}2$ m (valeurs de référence) ; puis $r = 1$ m et $p = -1{,}21$ m (erreur sur p) ; $r = 1{,}01$ m et $p = -1{,}2$ m (erreur sur r)
Calculer le tirage de cette lentille en déterminant $\Delta p'$ pour les cas a) et b) et en déduire s'il est moins dommageable de faire une erreur sur r ou sur p ?
3) Nous proposons de retrouver les résultats précédents en écrivant la différentielle de p' en fonction de p et r et en supposant que l'on a la même incertitude sur p et r soit : $\Delta p = \Delta r$. Donner l'expression de cette différentielle et interpréter les résultats précédents.

Solution

1) La deuxième face de la lentille étant plane, $r' = \infty$ et la relation de conjugaison s'écrit $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = (n-1)\frac{1}{r}$, avec $n = 1{,}5$. On en déduit que $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{2r}$ soit $p' = \frac{2rp}{2r+p}$. On rappelle que, pour un objet réel, $p < 0$; comme r est positif, l'image sera virtuelle ($p' < 0$) si $2r + p > 0$; dans le cas contraire ($p < -2r$), elle sera réelle ($p' > 0$).
2) Pour toutes les valeurs proposées de r et p, on a donc toujours $p > -2r$. On s'attend donc toujours à une image virtuelle pour laquelle $p' < 0$. Le tableau 18.1 donne la valeur de p' dans les différentes situations proposées. Il permet de comparer successivement les valeurs de p' obtenues dans la situation de référence avec celles calculées dans les cas a) et b) où l'on fait une erreur sur p ou sur r.

Tableau 18.1

Cas a)			Cas b)		
Référence $r = 1$ m $p = -1{,}5$ m	$p'_1 = -6$ m		**Référence** $r = 1$ m $p = -1{,}2$ m	$p'_4 = -3$ m	
Erreur sur p $r = 1$ m $p = -1{,}51$ m	$p'_2 = -6{,}163$ m	$p'_1 - p'_2 = 0{,}163$ m	**Erreur sur p** $r = 1$ m $p = -1{,}21$ m	$p'_5 = -3{,}063$ m	$p'_4 - p'_5 = 0{,}063$ m
Erreur sur r $r = 1{,}01$ m $p = -1{,}5$ m	$p'_3 = -5{,}827$ m	$p'_3 - p'_1 = 0{,}173$ m	**Erreur sur r** $r = 1{,}01$ m $p = -1{,}2$ m	$p'_6 = -2{,}956$ m	$p'_4 - p'_6 = 0{,}044$ m

Remarquons que dans le cas a), une erreur sur la mesure du rayon de courbure r est plus pénalisante qu'une erreur sur la position p.
Dans le cas b), la situation est inversée. Ce point sera expliqué dans la question suivante.

3) Sachant que $p' = \dfrac{2rp}{2r+p}$, on peut écrire sa différentielle comme

$$dp' = \left(\frac{\partial p'}{\partial p}\right) dp + \left(\frac{\partial p'}{\partial r}\right) dr = \left(\frac{4r^2}{(2r+p)^2}\right) dp + \left(\frac{2p^2}{(2r+p)^2}\right) dr$$

ou encore, après simplification $dp' = \dfrac{2}{(2r+p)^2}(2r^2\, dp + p^2\, dr)$.

Si les incertitudes sur p et r sont égales, on peut poser $\Delta p = \Delta r = \Delta x$, alors $\Delta p' = \dfrac{2\Delta x}{(2r+p)^2}(2r^2 + p^2)$.

L'expression précédente montre immédiatement que les erreurs sur p' causées par celles sur p et r sont les mêmes si $2r^2 = p^2$, qui s'écrit aussi $|p| = r\sqrt{2}$. Par contre, ce n'est plus vrai si $|p| \neq r\sqrt{2}$. On peut distinguer deux cas différents selon la valeur relative de p et de $r\sqrt{2}$: si $|p| > r\sqrt{2}$, on retrouve les résultats du cas a) de la question 2) ; $|p| < r\sqrt{2}$ correspond au cas b) de la question 2).

Construction d'images à travers une lentille mince

FICHE 19

I Méthode

La méthode de construction est la même que celles présentées dans les fiches précédentes pour d'autres éléments optiques. Elle suppose connues les positions des foyers objet F et image F' par rapport au sommet S de la lentille. On note la distance focale objet $f = \overline{SF}$ et la distance focale image, $f' = \overline{SF'}$. On se place toujours dans le cadre de l'approximation de Gauss et l'image $A'B'$ d'un petit objet AB, perpendiculaire en A à l'axe principal, est elle-même située en A', dans un plan perpendiculaire à l'axe principal.

À partir du point B de l'objet AB, on choisit deux rayons incidents particuliers. Pour la lentille mince, ces deux rayons sont (Figures 19.1 et 19.2) :

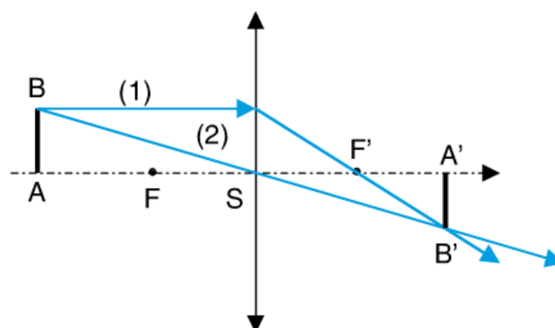


Figure 19.1

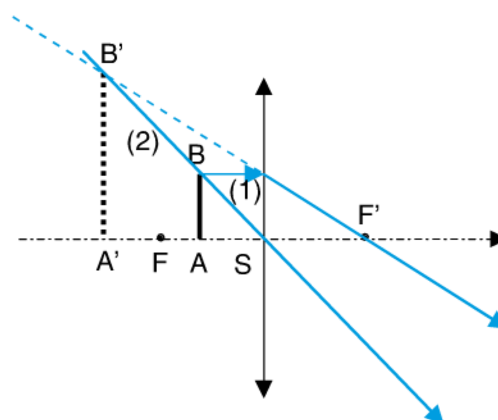


Figure 19.2

- Le rayon (1) parallèle à l'axe optique qui sort de la lentille en passant par le foyer image F'.
- Le rayon (2) passant par le sommet S de la lentille et qui n'est pas dévié.

Après la lentille mince, ces deux rayons, ou leur prolongement, se coupent au point B'. En abaissant à partir de B' la perpendiculaire à l'axe optique, on obtient l'image $A'B'$. Si B' est à l'intersection des deux rayons physiques qui ont traversé la lentille, l'image $A'B'$ est réelle (figure 19.1). Si B' est à l'intersection du prolongement d'au moins un des rayons qui traversent la lentille, l'image $A'B'$ est virtuelle (figure 19.2).

La démarche est la même, que la lentille soit convergente ou divergente. Les Figures 19.3 montrent les différentes possibilités pour une lentille convergente (Figures 19.3a à c) ou divergente (Figures 19.3d à f).

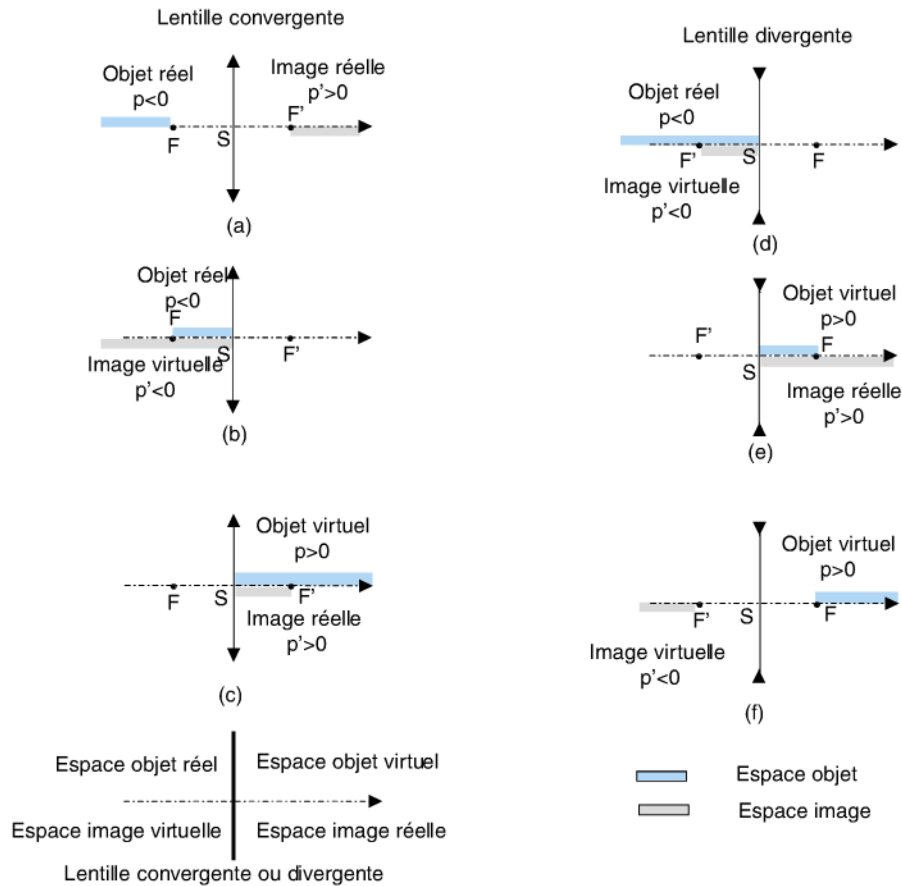


Figure 19.3 Les différentes possibilités des lentilles minces

II Le grandissement transversal et longitudinal

Le grandissement transversal d'une lentille mince est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p}$$

Si $\gamma < 0$, l'image est renversée ; elle est droite dans le cas contraire ($\gamma > 0$). Si $|\gamma| < 1$, l'image est plus petite que l'objet ; elle est plus grande si $|\gamma| > 1$. Tous les cas possibles sont résumés dans le tableau 19.1.

Le grandissement longitudinal, g, d'une lentille mince est donné par :

$$g = \frac{dp'}{dp} = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = \gamma^2$$

g est en général différent de γ.

Tableau 19.1

	$\gamma > 0$ (image droite)	$\gamma < 0$ (image renversée)
$\|\gamma\| > 1$ (image agrandie)	Droite et agrandie	Renversée et agrandie
$\|\gamma\| < 1$ (image réduite)	Droite et réduite	Renversée et réduite

Mise au point pour une photo nette

Pourquoi faut-il déplacer l'objectif d'un appareil photo pour obtenir une photo nette ?

Solution

L'appareil photo présente une contrainte : la pellicule photo (ou le capteur CCD pour un appareil numérique) ; celle-ci est placée dans le boîtier à un endroit fixe. Pour que la photo soit nette, il faut que la position de la pellicule (ou du capteur) coïncide avec celle de l'image A', déterminée par la relation de conjugaison de l'objectif de l'appareil photo.

Ce dernier peut être considéré en première approximation comme une lentille mince convergente, de distance focale f' (positive) fixe. Sa relation de conjugaison $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ s'écrit $p' = \frac{pf'}{p+f'}$. Pour que l'image reste nette sur la pellicule fixe (ou le capteur), quelle que soit la position de l'objet qui lui est associé, il est nécessaire, pour un objectif de distance focale donné, de déplacer le sommet S de la lentille formant l'objectif (Figure 19.4). Cela revient à imposer à l'image d'être toujours sur la pellicule de l'appareil photo quelle que soit la position de l'objet p.

La figure 19.4 illustre deux situations ; sur la figure 19.4.a, la mise au point n'est pas faite : l'image $A'B'$ est en arrière de la pellicule photo et le cliché sera flou. Sur la figure 19.4.b, $A'B'$ est exactement sur la pellicule et la photo sera nette. Certains appareils, dits autofocus, réalisent automatiquement cette opération de mise au point.

Remarque : la valeur du grandissement transversal γ est imposée par p et p', positions de l'objet et de son image. L'une et l'autre sont comme toujours repérées par rapport au sommet S de l'objectif. Choisir la taille de l'image sur la pellicule n'est possible que dans le cas où l'appareil photo est muni d'un objectif à distance focale variable.

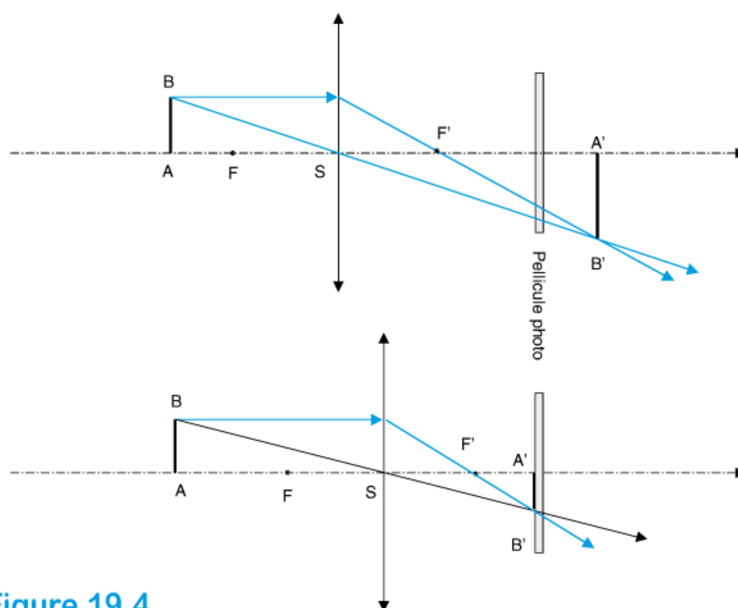


Figure 19.4

Par ailleurs, les objets photographiés sont toujours réels et $p < 0$. De même, si l'on veut obtenir une image matérialisable sur une pellicule photo (ou un capteur CCD), cette dernière doit être réelle et $p' > 0$. Le grandissement transversal $\gamma = \frac{p'}{p}$ est donc toujours négatif et l'image sur la pellicule de l'appareil photo est renversée par rapport à l'objet photographié.

Des images déformées

Les images à travers une lentille mince sont-elles toujours déformées ?

Solution

Pour qu'une lentille mince, de distance focale f', ne déforme pas un objet, il faut que le grandissement longitudinal g soit égal au grandissement transversal γ. Nous avons établi que, pour une lentille mince, $\gamma = \frac{p'}{p}$ et $g = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = \gamma^2$. Selon les cas, γ est positif ou négatif, mais g est toujours positif. Pour que l'image à travers une lentille mince ne soit pas déformée, il faut que $g = |\gamma| = \pm\gamma$ qui s'écrit $\gamma = \frac{p'}{p} = \pm 1$. L'image est alors de la même taille que l'objet, droite si $\gamma > 0$, renversée si $\gamma < 0$.

Deux situations sont *a priori* possibles, selon que l'objet est réel ou virtuel.

- Cas d'un objet réel ($p < 0$) :
  - Si $\gamma = \frac{p'}{p} = 1$, l'image d'un objet réel ($p < 0$) est virtuelle($p' < 0$) et sa position coïncide avec celle de l'objet. De plus, la relation de conjugaison de la lentille mince donne $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p'} = 0 = \frac{1}{f'}$. Cette situation ne serait donc observable qu'avec une lentille de distance focale infinie, ce qui est impossible.
  - Si $\gamma = \frac{p'}{p} = -1$, l'image d'un objet réel ($p < 0$) est donc réelle ($p' > 0$). On a alors $p' = -p$ et la relation de conjugaison s'écrit $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p'}$ $= \frac{2}{p'} = \frac{1}{f'}$, ce qui impose $p' = 2f' > 0$ ou $p = -2f'$. Cette solution est tout à fait acceptable : elle correspond à la transformation à travers une lentille convergente, représentée figure 19.5.
- Cas d'un objet virtuel ($p > 0$) :

- Si $\gamma = \frac{p'}{p} = 1$, l'image d'un objet virtuel $(p > 0)$ est réelle $(p' > 0)$. Cependant, on a vu qu'une application de la relation de conjugaison débouchait dans ce cas là sur une lentille de distance focale infinie, ce qui est impossible et élimine ce cas.

- Si $\gamma = \frac{p'}{p} = 1$, $p' = -p$; l'image d'un objet virtuel $(p > 0)$ est donc aussi virtuelle $(p' < 0)$. La relation de conjugaison impose que $p' = 2f'$ ou $p = -2f'$. La lentille utilisée est divergente $\left(f' = \frac{p'}{2} < 0\right)$ et l'image est renversée (Figure 19.6)

  Ce cas est peu intéressant car ni l'objet ni l'image ne sont visualisables sur un écran.

En conclusion, une lentille mince ne déforme pas un objet réel (resp virtuel) dans le cas où l'objet est à une distance de son sommet S égale au double de la distance focale objet (resp image). Son image est alors située à une distance de S égale au double de la distance focale image (resp objet). Dans le cas d'un objet réel, on parle de montage « $2f - 2f$ » ou d'« œil fictif ».

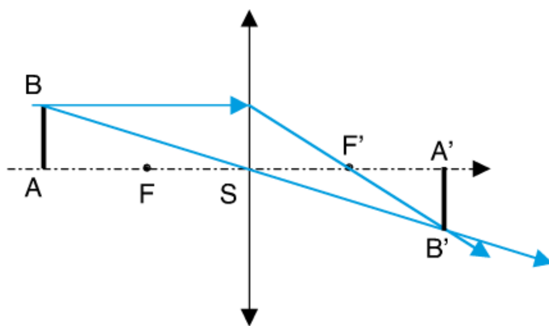


Figure 19.5

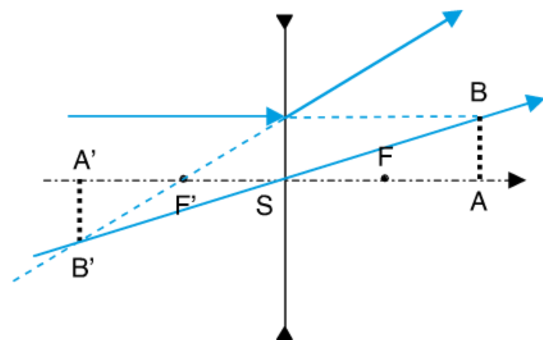


Figure 19.6

Lentille pivotante

1) Un objet réel A, positionné à une distance p d'une lentille mince convergente de distance focale f', donne une image A'. Exprimer la position de l'image A', repérée par p', en fonction de f' et de p.

2) La lentille pivote d'un angle α autour de son centre S (Figure 19.5). Démontrer en s'aidant de l'objet A_1 et de son image A'_1 représentés figure 19.5, que la nouvelle image A'_1 de A est repérée par $\overline{SA'_1} = \frac{pf'}{f' + p\cos\alpha}$.

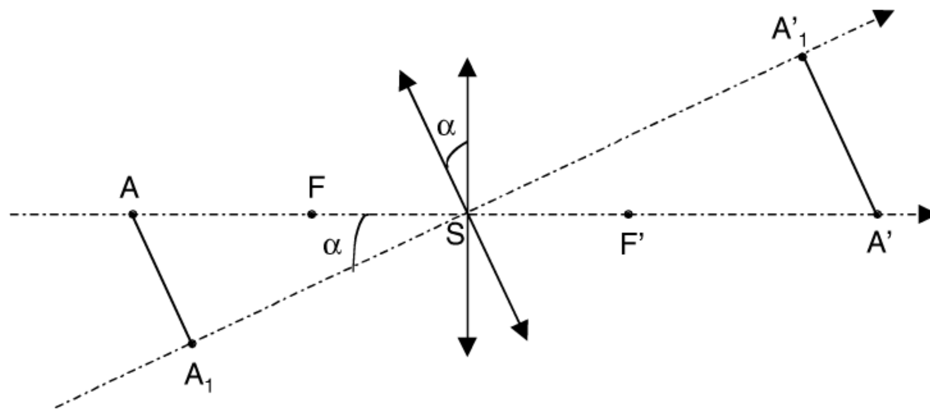


Figure 19.7

Solution

1) La position p' de l'image à travers la lentille mince de distance focale f' est donnée par la relation de conjugaison : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$. On a donc $p' = \frac{pf'}{p+f'}$ où p est la position de l'objet.

2) Si la lentille pivote d'un angle α autour de S, c'est aussi le cas de l'axe principal. Soit A_1, la projection de A sur ce nouvel axe (Figure 19.7) ; l'image de A_1 à travers la lentille est A'_1. A_1 et A'_1 sont donc reliés par la relation de conjugaison : $\frac{1}{\overline{SA'_1}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{1}{f'}$. D'autre part, la figure 19.7 montre que $\overline{SA_1} = \overline{SA} \cos\alpha = p\cos\alpha$. On a donc : $\frac{1}{\overline{SA'_1}} - \frac{1}{p\cos\alpha} = \frac{1}{f'}$ soit encore $\overline{SA'_1} = \frac{pf'\cos\alpha}{f'+p\cos\alpha}$.

La netteté de la projection d'une diapositive

Un projecteur de diapositives est constitué d'une lentille mince de distance focale $f' = 15$ cm. La largeur de la diapositive est de 36 mm.

1) Sachant que l'image est nette lorsque l'écran est placé à 5 m de la lentille, déterminer le grandissement transversal de cette image.

2) On considère que l'image est nette sur l'écran lorsque le faisceau issu d'un point de l'objet ne produit pas sur l'écran une tache de diamètre supérieur à 1 mm. De quelle distance maximale peut-on éloigner l'écran du projecteur tout en gardant une image nette ? On donne le diamètre de la lentille $D = 5$ cm.

Solution

1) Le projecteur de diapositives est assimilable à une lentille mince de distance focale f' ; sa relation de conjugaison est $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$, soit $p = \frac{p'f'}{f' - p'}$. Le grandissement transversal est donné par $\gamma = \frac{p'}{p} = \frac{f' - p'}{f'}$. Avec $p' = 5$ m et $f' = 15$ cm, on obtient $\gamma = -32{,}33$. L'image est donc renversée et environ 32 fois plus grande que la diapositive. Si la diapositive AB fait 36 mm de haut, son image renversée, aura pour hauteur sur un écran placé à 5 m : $\overline{A'B'} = \gamma\overline{AB} = -1164$ mm $= -1{,}164$ m.

2) Si l'image est en A', elle est nette, sa position vérifiant exactement la relation de conjugaison de la lentille mince. Supposons que l'écran ne soit pas exactement positionné en A'. S'il est trop éloigné, l'image sera floue. En revanche, on peut se permettre une petite erreur de son positionnement sans que ça soit gênant lors de la projection. Soit δ, l'écart entre la position optimale de l'écran et la position approchée (Figure 19.8). Si D est la dimension de la lentille et d celle du faisceau issu de l'image A' située sur l'écran mal positionné, $\tan\alpha = \frac{D}{2\overline{SA'}} = \frac{D}{2p'}$ et $\tan\alpha =, \frac{d}{2\delta}$ soit finalement $\delta = \frac{p'd}{D}$. AN : si $p' = 500$ cm, $d = 0{,}1$ cm et $D = 5$ cm, alors $\delta = 10$ cm

Au maximum, on peut écarter l'écran de 10 cm de sa position optimale pour garder une image nette.

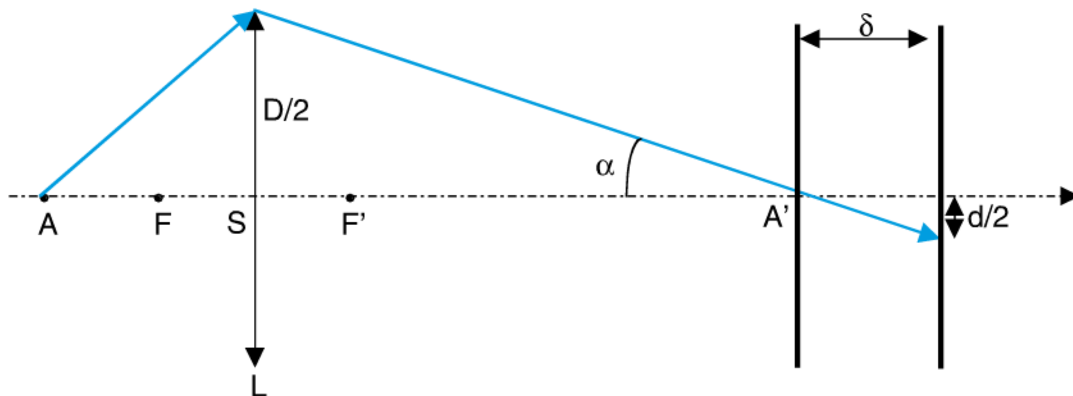
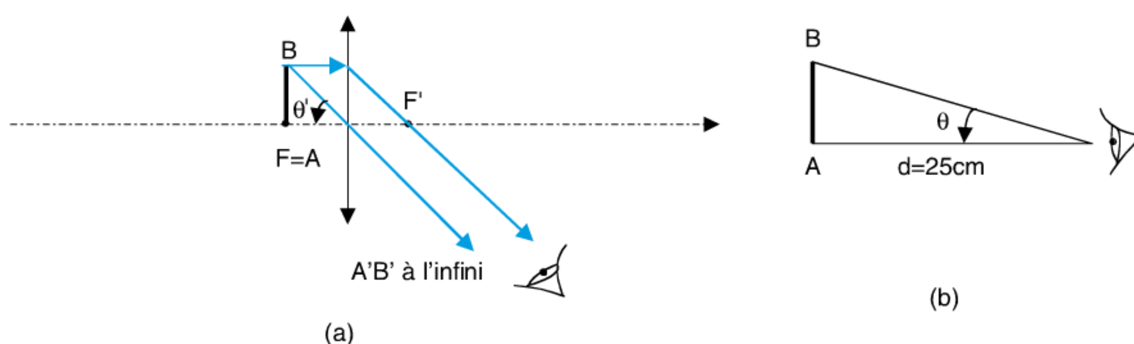


Figure 19.8

La loupe

FICHE 20

Une loupe bon marché est une lentille mince convergente. Pour bien l'utiliser, il faut placer l'objet que l'on souhaite observer à son foyer objet F. Dans ces conditions, l'image de l'objet, vu à travers la loupe est droite, de grande taille (son grandissement transversal γ tend vers l'infini) et rejetée à l'infini. Elle est donc toujours nette (Figure 20.1a).



Angle de vision à travers une loupe. Angle de vision directe d'un objet

Figure 20.1

Grossissement

Avec une loupe de vergence ϕ et de distance focale image f', le grandissement transversal γ tend vers l'infini et n'est donc pas pertinent pour caractériser la taille de l'image à travers une loupe. On préfèrera parler du grossissement G.

- **Avec la loupe**, les rayons en provenance de l'image $A'B'$ arrivent sous une incidence θ'. En considérant que θ' est un angle orienté positif, il s'écrit (figure 20.1a) :

$$\theta' \approx \frac{\overline{AB}}{\overline{SF}} = -\frac{\overline{AB}}{f'} = -\phi\overline{AB}$$

- **À l'œil nu**, si l'objet AB est placé à une distance algébrique égale à $-d$ (exprimée en m), on le voit sous un angle orienté positif θ donné par (Figure 20.1b) :

$$\theta \approx \frac{\overline{AB}}{-d}$$

Le grossissement G d'une loupe est une grandeur sans dimension définie par :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} \quad \text{soit} \quad \boxed{G = \frac{d}{f'} = d\phi}$$

où f' est exprimée en mètre (m) et ϕ en dioptrie (m^{-1}).

II Grossissement commercial

On définit le grossissement commercial G_c d'une loupe comme le grossissement G calculé pour la distance standard $d = 0{,}25$ m = 1/4 m. G_C est également sans dimension et d doit être exprimée en mètre. La distance $d = 0{,}25$ m correspond en fait à la distance moyenne de vision de près et sans défaut d'un individu. Le grossissement commercial d'une loupe G_c est donc défini par :

$$\boxed{Gc = \frac{d}{f'} = \frac{1}{4f'} = \frac{\phi}{4}}$$

III Puissance intrinsèque

La puissance intrinsèque est utilisée pour les systèmes optiques qui, comme la loupe, permettant d'observer des objets rapprochés. On la note P_i ; c'est une grandeur positive que l'on définit comme :

$$P_i = \frac{-\theta'}{\overline{AB}} \quad \text{soit} \quad \boxed{P_i = \frac{1}{f'} = \phi}$$

Où f' est la distance focale image et ϕ la vergence de la loupe.
Le grossissement commercial d'une loupe, G_c, est donc relié à la puissance intrinsèque P_i par :

$$\boxed{G_C = \frac{P_i}{4}}$$

Contrairement au grossissement, la puissance intrinsèque P_i a pour unité le radian/mètre.

Du grossissement à la distance focale de la loupe

Quelle est la distance focale image d'une loupe qui grossit 8 fois ? Comment l'utiliser confortablement ?

Solution

Si une loupe grossit 8 fois, $G_C = 8$. Comme $G_C = \frac{\phi}{4}$, la vergence de la loupe $\phi = 32\ \delta$ et sa distance focale image $f' = \frac{1}{\phi} = 3{,}125$ cm. Pour utiliser confortablement cette loupe, il faut placer l'objet devant elle, à son foyer objet F situé à la distance algébrique $f = -f' = -3{,}125$ cm. On obtient ainsi une image nette virtuelle située à l'infini. Elle est transformée par notre œil en une image réelle, nette sur la rétine (voir fiche 29).

Loupe biconvexe

Une loupe est constituée par une lentille bi-convexe symétrique (Figure 20.2). Si son grossissement commercial est égal à 4 et son indice de réfraction $n = 1{,}5$, quelle est la courbure de ses deux faces ?

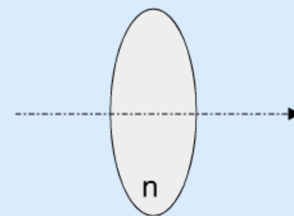


Figure 20.2

Solution

Une loupe, dont le grossissement commercial $G_C = 4$, a une vergence $\phi = 4Gc = 16$ et une distance focale image $f' = \frac{1}{\phi} = 6{,}25$ cm.

Par ailleurs, si r et r' sont respectivement les rayons de courbure de la face avant et de la face arrière de la lentille et que cette dernière est biconvexe symétrique, on a $r > 0$, $r' < 0$ et $r' = -r$.

On peut donc écrire que $\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = (n-1)\frac{2}{r}$ (voir fiche 18) ; avec $n = 1{,}5$ et $f' = 6{,}25$ cm, on obtient $r = f' = 6{,}25$ cm. La courbure de la face avant vaut donc $r = 6{,}25$ cm, celle de la face arrière $r' = -6{,}25$ cm.

Quel effet du déplacement d'une loupe

On utilise une loupe sans nécessairement chercher à positionner l'objet au foyer objet. Dans quel sens se déplace l'image d'un objet si celui-ci se rapproche du sommet de la lentille ? Comment obtenir une image de taille maximale ?

Solution

La figure 20.3 montre l'effet du changement de position de l'objet le long de l'axe principal de la loupe, assimilée à une lentille mince de sommet S. Lorsque l'objet se rapproche du sommet de la lentille (figure 20.3a à 20.3c), son image s'en éloigne et grandit. C'est donc bien en positionnant l'objet au foyer objet d'une loupe que son image est la plus grande (figure 20.3c).

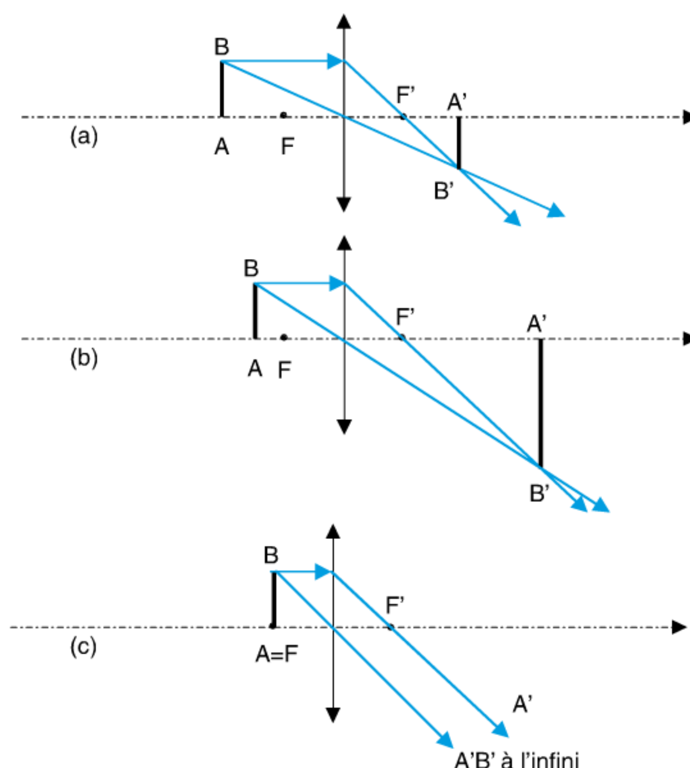


Figure 20.3

Puissance et vergence d'une loupe

Quelle est la vergence d'une loupe qui a une puissance intrinsèque de 4 radian/mètre ?

Solution

La puissance intrinsèque, en radian/mètre, est reliée au grossissement commercial sans dimension par $P_i = 4G_C$. On a donc $G_C = \dfrac{P_i}{4} = 1$. D'autre part, $G_C = \dfrac{\phi}{4}$, ce qui entraîne $\phi = 4G_C = P_i = 4\ \delta$. Soulignons que, si la valeur de la vergence est ici égale à celle de la puissance intrinsèque, leur unité n'est pas la même.

FICHE 21

La lentille mince entre deux milieux différents

On rappelle qu'une lentille mince est taillée dans un matériau d'indice absolu n. Ses deux faces sont deux dioptres de rayons de courbure r et r' dont les sommets sont considérés confondus en S, sommet de la lentille (approximation de la lentille mince). Dans les exemples présentés précédemment, la lentille était utilisée dans l'air. Nous allons maintenant étudier le cas d'une lentille mince séparant deux milieux différents : le premier milieu, situé devant la lentille, a un indice n_1 et le deuxième, situé après la lentille, a un indice n_2.
Une lentille pouvant être convergente ou divergente, on pourra rencontrer les deux situations de la figure 21.1.

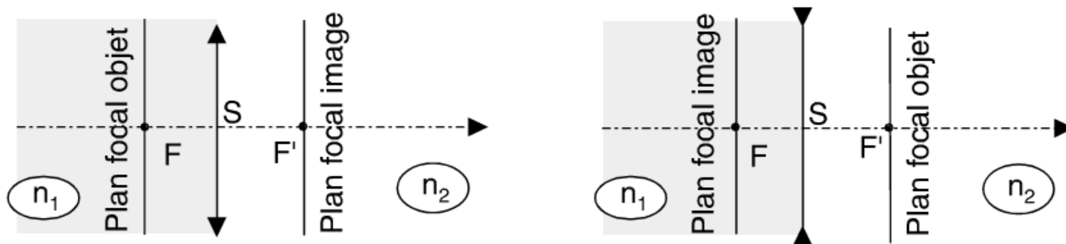


Figure 21.1

La relation de conjugaison et la vergence

On reste dans le cadre de l'approximation de Gauss. La relation de conjugaison reliant la position d'un objet A sur l'axe principal à celle de son image A' prend une forme différente, prenant en compte les différents indices (n, indice du matériau de la lentille et n_1 et n_2, indices des deux milieux différents situés de part et d'autre de la lentille). Elle s'écrit :

$$\frac{n_2}{p'} - \frac{n_1}{p} = \frac{n - n_1}{r} + \frac{n_2 - n}{r'} = \phi$$

où $p = \overline{SA}$ et $p' = \overline{SA'}$ sont les positions de A et A' par rapport au sommet S de la lentille mince. $r = \overline{SC}$ et $r' = \overline{SC'}$ sont, respectivement, les rayons de courbure de la face d'entrée et de sortie de la lentille mince.

$\phi = \dfrac{n - n_1}{r} + \dfrac{n_2 - n}{r'}$ est la vergence de la lentille mince. On rappelle que l'unité de la vergence est la dioptrie, de symbole δ, et que, si $\phi > 0$, la lentille mince est convergente ; au contraire, si $\phi < 0$, la lentille mince est divergente.

II Les foyers

Nous avons vu précédemment qu'une lentille mince possèdait deux foyers, repérés sur l'axe principal par F et F' (Figure 21.1) :

- F est le foyer objet. C'est la position d'un objet dont l'image est rejetée à l'infini.
- F' est le foyer image. C'est la position d'une image quand l'objet est situé à l'infini.

Les distances algébriques entre les foyers F et F' et le sommet S de la lentille mince sont les distances focales. $f = \overline{SF}$ est la distance focale objet et $f' = \overline{SF'}$, la distance focale image. Pour une lentille mince convergente, $f' > 0$ (F' est à droite du sommet S et F à gauche). Pour une lentille mince divergente, au contraire, $f' < 0$ (F' est à gauche de S et F à droite). Les plans perpendiculaires à l'axe principal passant par F et F' sont respectivement les plans focaux objet et image.
Les expressions des distances focales (et par conséquent la position des foyers F et F') sont fonction des indices n_1 et n_2. On a :

$$f = \overline{SF} = -\frac{n_1}{\phi} \quad \text{et} \quad f' = \overline{SF'} = \frac{n_2}{\phi}$$

Pour une lentille mince qui sépare deux milieux différents $\dfrac{f'}{f} = -\dfrac{n_2}{n_1}$. Par conséquent, les foyers F et F' ne sont **jamais** symétriques par rapport à son sommet S.

III Construction d'images

La méthode de construction, faite dans l'approximation de Gauss, suppose connues les positions des foyers F et F' de la lentille mince.

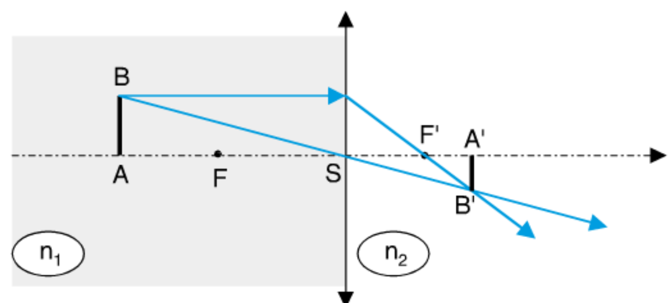


Figure 21.2

À partir du point B de l'objet AB, on choisit toujours deux rayons particuliers incidents et la démarche est la même que celle présentée fiche 16 pour la lentille mince. Si l'objet AB est réel (figures 21.2 et 21.4), les deux rayons physiques passent par B. Si l'objet est virtuel (figure 21.3), c'est le prolongement d'un ou de deux des rayons incidents qui passe par B.
Après la lentille mince, les rayons ou leur prolongement se croisent en B'. La perpendiculaire à l'axe optique à partir de B', permet d'obtenir le point A' et l'image $A'B'$.
Si B' est à l'intersection des rayons physiques l'image $A'B'$ est réelle (figure 21.2) ; sinon elle est virtuelle (figures 21.3 et 21.4).

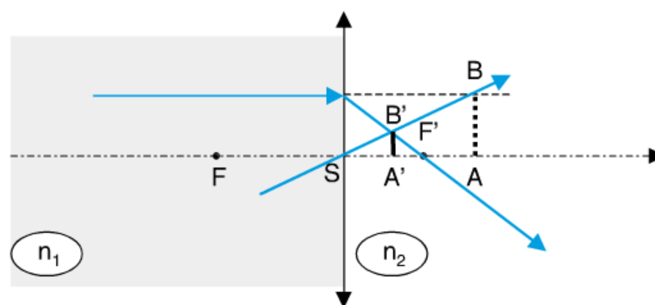


Figure 21.3

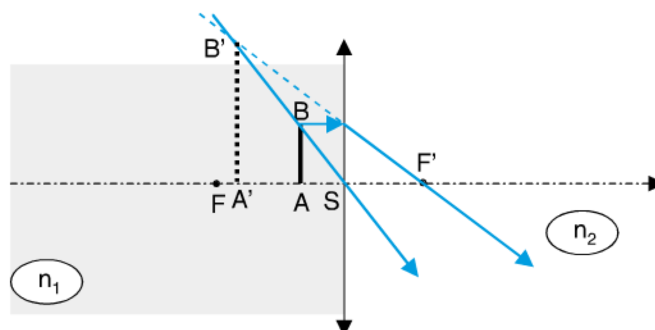


Figure 21.4

IV Le grandissement transversal et longitudinal

Lorsque l'on considère une lentille mince séparant deux milieux différents d'indices n_1 et n_2, le grandissement transversal γ devient :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n_1 p'}{n_2 p}$$

- Si $\gamma < 0$, l'image est renversée ; dans le cas contraire, $(\gamma > 0)$ elle est droite.
- Si $|\gamma| < 1$, l'image est plus petite que l'objet, agrandie si $|\gamma| > 1$.

Le grandissement longitudinal, g, est donné par :

$$g = \frac{dp'}{dp} = \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{p'}{p}\right)^2 = \frac{n_2}{n_1}\gamma^2$$

La relation entre g et γ montre une déformation systématique de l'image par rapport à l'objet dans sa dimension longitudinale. De même, on peut remarquer que, g étant toujours positif, l'image est dans le même sens que l'objet le long de l'axe principal.

Influence de l'eau sur la projection d'une image

Anthony a reçu pour son anniversaire une lentille mince convergente, plan convexe, de grand diamètre, et de distance focale image $f' = 10$ cm. Afin de distraire son petit poisson rouge, il veut projeter une image de l'écran de son ordinateur dans l'aquarium, qui représente un bel hippocampe filiforme de 2 cm de haut (Figure 21.5). Pour cela, il veut coller la lentille sur la paroi de son aquarium rempli d'eau. Les parois de verre sont d'épaisseur négligeable.

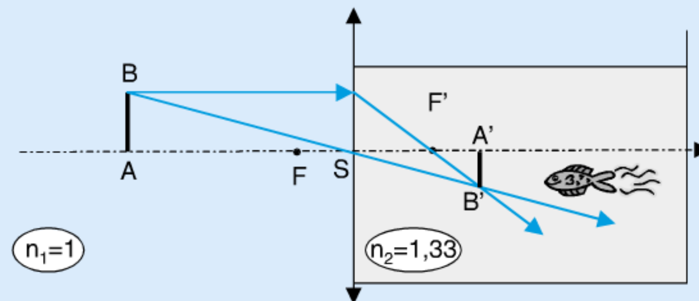


Figure 21.5

1) Dans un premier temps, Anthony projette l'image de l'hippocampe à travers la lentille mince posée sur la table au même endroit où elle sera collée ultérieurement sur la paroi de l'aquarium. Il mesure la distance entre l'écran de l'ordinateur et la lentille, soit 1 mètre. Quelle doit être la distance entre la lentille et le support blanc pour que l'image de l'hippocampe y soit nette ? Quelle est la taille de l'image de l'hippocampe ? L'indice du matériau dans lequel est taillée la lentille est $n = 1{,}5$.

2) Que devient la relation de conjugaison de la lentille quand elle est collée sur la paroi de l'aquarium ? L'indice absolu de l'eau est $n_2 = 4/3$ et celui de l'air est $n_1 = 1$.

3) Antony doit-il conserver la même position entre la lentille mince et le support blanc pour avoir, dans l'eau, une image nette de l'hippocampe ? Son image a-t-elle toujours la même taille ?

Solution

1) Tant qu'Anthony teste son dispositif sur la table, la lentille mince, de distance focale image $f' = 10$ cm, sépare deux milieux identiques, l'air. Pour trouver la position de l'image de l'hippocampe, il suffit donc d'appliquer la relation de conjugaison : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$, où $p = \overline{SA} = -100$ cm. Le support blanc doit être à la distance p' de

la lentille telle que $p' = \dfrac{pf'}{p+f'} = 11{,}11$ cm. La taille de l'image est donnée par : $\overline{A'B'} = \gamma\overline{AB} = \dfrac{p'}{p}\overline{AB} = \dfrac{11{,}11}{-100}2 = -0{,}22$ cm.

2) Collée sur la paroi de l'aquarium, la lentille sépare un premier milieu (l'air) d'un deuxième milieu (l'eau). La relation de conjugaison devient : $\dfrac{n_2}{p'} - \dfrac{n_1}{p} = \dfrac{n-n_1}{r} + \dfrac{n_2-n}{r'}$, où n, n_1 et n_2 sont respectivement les indices du matériau dans lequel est taillée la lentille, de l'air et de l'eau. Si, par ailleurs, la lentille est convexe plan, $r' = \infty$. Sa distance focale dans l'air est $\dfrac{1}{f'} = (n-1)\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r'}\right) = \dfrac{n-1}{r}$. On a donc $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{(n-1)f'}$. La relation de conjugaison de la lentille devient donc $\dfrac{n_2}{p'} - \dfrac{n_1}{p} = \dfrac{n-n_1}{r} = \dfrac{n-n_1}{(n-1)f'}$ avec $f' = 10$ cm.

3) On déduit de la question précédente $p' = \dfrac{n_2(n-1)pf'}{n_1(n-1)f' + (n-n_1)p}$. En injectant les valeurs numériques dans cette équation, on déduit que $p' = 14{,}8$ cm. Pour que l'image de l'hippocampe y apparaisse nette, Anthony devra repousser le support blanc de 3,69 cm après l'avoir placé dans l'aquarium. La taille de cette nouvelle image est $\overline{A'B'} = \gamma\overline{AB} = \dfrac{n_1 p'}{n_2 p} = \dfrac{(1)14{,}8}{(4/3)(-100)}2 = -0{,}22$ cm. Elle a donc la même taille qu'elle soit à l'extérieur ou à l'intérieur de l'aquarium.

Vision sous-marine

On suppose que l'œil d'Isabel est équivalent à une lentille mince convergente de sommet S. Sa rétine qui joue le rôle d'écran est positionnée à une distance $d = \overline{SA'} = 2{,}5$ cm. L'œil est constitué d'une matière transparente d'indice $n_2 = 1{,}33$. Il est donc assimilable à une lentille qui sépare deux milieux différents, d'indices respectifs n_1, (milieu à l'extérieur de l'œil), et n_2. Sa distance focale image est considérée fixe, égale à $f' = 2{,}2$ cm. Pour être nette et visible, l'image, réelle, doit être positionnée sur la rétine, en A'.

1) À quelle distance Isabel doit-elle placer sa montre pour y lire l'heure quand elle est debout au bord de la piscine ? L'indice de l'air est $n_1 = 1$.

2) La distance entre la montre et l'œil d'Isabel reste-t-elle la même si elle veut y lire l'heure nettement quand son corps est immergé entièrement dans la piscine ? L'indice de l'eau est $n_1 = 1{,}33$.

Solution

1) L'œil d'Isabel est assimilable à une lentille séparant deux milieux différents. La relation de conjugaison est $\frac{n_2}{p'} - \frac{n_1}{p} = \phi$, avec $\phi = \frac{n_2}{f'}$. Le fait que l'image soit sur la rétine impose $p' = d$. En dehors de la piscine, $n_1 = 1$ et $p = \frac{n_1 p'}{n_2 - p'\phi} = \frac{n_1 f' p'}{n_2(f' - p')}$ qui s'écrit $p = \frac{n_1 f' d}{n_2(f' - d)} = \frac{(1)(2{,}2)(2{,}5)}{(1{,}33)(2{,}2 - 2{,}5)} = -13{,}78$ cm.

2) Dans la piscine, $n_1 = n_2 = 1{,}33$ et $p = \frac{n_1 f' p'}{n_2(f' - p')} = \frac{f'd}{(f' - d)} = \frac{(2{,}2)(2{,}5)}{(2{,}2 - 2{,}5)}$ $= -18{,}33$ cm. Isabel devra donc éloigner sa montre pour voir l'heure dans les mêmes conditions. Remarquons que, dans ce dernier cas, l'indice de réfraction de l'humeur présente dans l'œil a la même valeur que celui de l'eau ; on se retrouve bien dans le cas où la lentille sépare deux milieux identiques.

Photo sous-marine

L'appareil photographique numérique de Mélanie a un objectif équivalent à une lentille mince convergente de distance focale image $f' = 50$ mm. Son boîtier étanche lui permet de prendre des photos de son frère Pierre au fond de la piscine. Le boîtier est rempli d'air, d'indice $n_2 = 1$. Afin que la photo de son frère soit toujours nette, Mélanie peut mettre au point en modifiant l'écart entre l'objectif et la surface CCD photosensible fixée à l'arrière du boîtier.

1) Mélanie et Pierre sont debout au bord de la piscine et distants l'un de l'autre de 30 cm. Quelle est la distance entre l'objectif photographique et la surface CCD de l'appareil photo pour que la photo du visage de Pierre soit nette ?

2) Mélanie doit-elle ajuster la distance entre l'objectif photographique et la surface CCD de son appareil photo si Pierre et elle sont immergés dans l'eau de la piscine d'indice $n_1 = 1{,}33$? Expliquer.

Solution

1) En dehors de la piscine, il y a de l'air de part et d'autre de l'objectif de l'appareil photographique de Mélanie et l'on a $p = -30$ cm et $f' = 5$ cm. La relation de conjugaison est donc $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ et donne $p' = \frac{pf'}{p + f'} = \frac{(-30)5}{-30 + 5} = 6$ cm. C'est la distance entre l'objectif et la surface photosensible assurant une photo nette de Pierre.

2) Dans l'eau, l'objectif sépare deux milieux différents : l'eau ($n_1 = 1{,}33$) et l'air ($n_2 = 1$). La relation de conjugaison devient $\frac{n_2}{p'} - \frac{n_1}{p} = \frac{n_2}{f'}$ et donne $p' = \frac{n_2 p f'}{n_2 p + n_1 f'} = \frac{(1)(-30)(5)}{(1)(-30) + (1{,}33)5} = 6{,}42$ cm. Il va donc falloir que Mélanie écarte la surface photosensible de 0,42 cm pour que la photo de Pierre soit nette.

Les combinaisons

FICHE 22

On appelle combinaison ou doublet un système optique constitué de deux éléments simples (dioptres, miroirs, lentilles…) de sommets respectifs S_1 et S_2 et séparés d'une distance algébrique $\overline{S_1S_2} = e > 0$. On ne considèrera que cette fiche que le cas où les milieux extrêmes de la combinaison ont un indice égal à 1.
Chacun des deux éléments simples peut être soit convergent soit divergent. La vergence de la combinaison dépend des distances focales objets (f_1 et f_2) et images (f'_1 et f'_2) de ses deux éléments simples mais aussi de leur distance algébrique e (voir Figure 22.1a).
L'étude d'une combinaison peut être séquentielle ou directe. On se placera toujours dans l'approximation de Gauss.
L'étude séquentielle est laborieuse car il faut étudier successivement l'effet de chaque élément sur un objet. Elle peut reposer soit sur des calculs, soit sur la construction de rayons particuliers issus de l'objet. La connaissance de l'image finale repose alors sur celle d'une image intermédiaire qu'il faut déterminer au préalable. De plus, la position des images successives doit être repérée par rapport aux sommets de l'un puis de l'autre des deux éléments simples (le sommet du premier, S_1, pour l'image intermédiaire, le sommet du deuxième, S_2, pour l'image finale). Enfin, on ne sait rien sur les caractéristiques de la combinaison elle-même, qui peut cependant être considérée comme un nouvel élément optique à part entière.
L'étude directe des combinaisons repose sur deux étapes. La première consiste en la détermination des quatre caractéristiques de la combinaison appelées aussi éléments cardinaux (par exemple les foyers objet et image). La deuxième étape consiste à déterminer directement l'image finale d'un objet à travers la combinaison, sa position étant repérée par rapport à ces quatre éléments cardinaux. C'est l'étude directe des combinaisons que nous considérons dans cette fiche.

I Les éléments cardinaux

Les quatre éléments cardinaux d'une combinaison de deux éléments simples sont (voir un exemple figure 22.1) :

- Le foyer objet F, correspondant à la position sur l'axe principal d'un objet dont l'image à travers la combinaison est située à l'infini. Le plan focal objet, perpendiculaire à l'axe principal, passe par F.
- Le foyer image F', correspondant à la position sur l'axe principal de l'image à travers la combinaison d'un objet situé à l'infini. Le plan focal image, perpendiculaire à l'axe principal, passe par F'.
- Les points principaux H et H' qui sont uniques et conjugués ; par définition, un objet situé en H a une image en H', avec un grandissement transversal γ égal à 1. Les plans perpendiculaires à l'axe principal en H et H' sont appelés respectivement les plans principaux objet et image.

Ces quatre points sont positionnés sur l'axe optique de la combinaison. Leur position dépend de l'épaisseur de la combinaison, définie par la distance algébrique entre les deux sommets des deux éléments simples de la combinaison $e = \overline{S_1S_2}(e > 0)$. La position de ces quatre points dépend aussi des distances focales f_1, f_1', f_2 et f_2'. de chacun des deux éléments simples de la combinaison (Figure 22.1b).

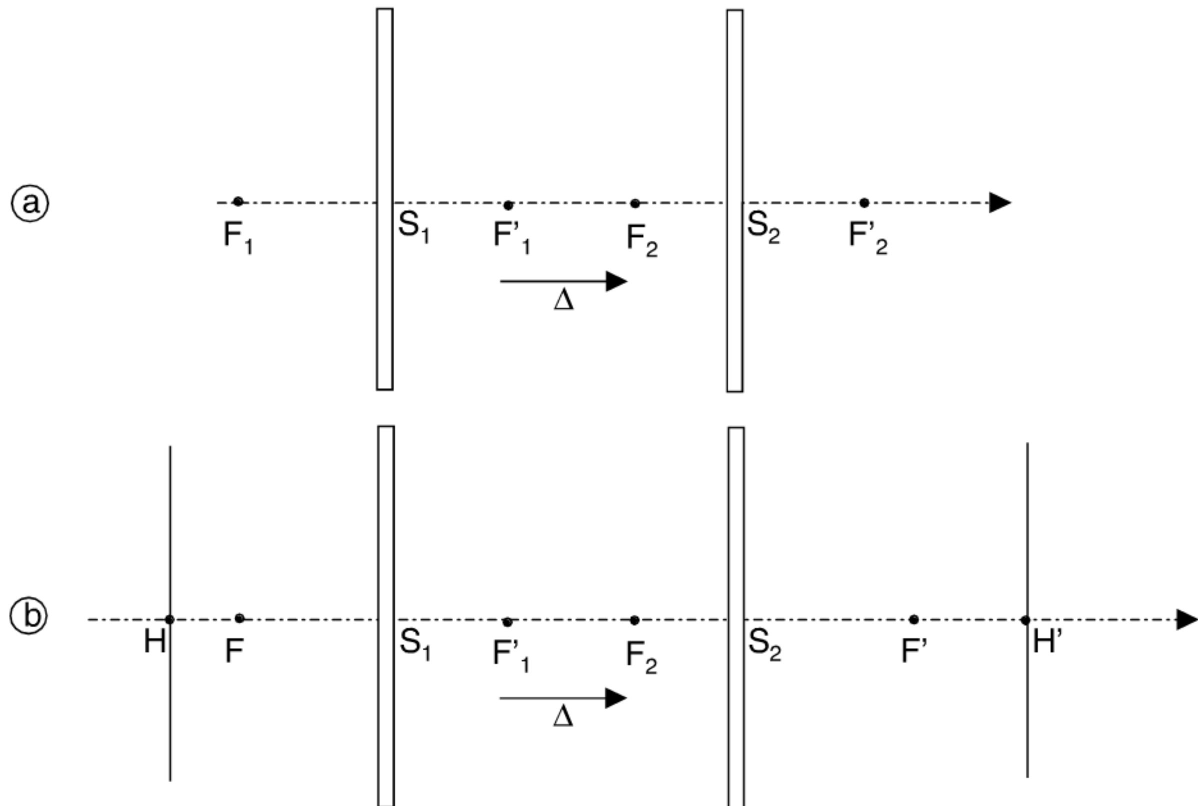


Figure 22.1

II L'intervalle optique Δ

Toutes les formules d'une combinaison peuvent s'exprimer en fonction de la distance algébrique entre le foyer image du premier élément de la combinaison, F_1' et le foyer objet du deuxième élément, F_2 (Figure 22.1). Cette distance algébrique, notée Δ s'appelle l'intervalle optique de la combinaison. On a :

$$\Delta = \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'S_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2F_2}$$

$$\text{soit} \quad \Delta = -f_1' + e + f_2$$

Notons que, dans le cas particulier d'associations de lentilles minces où $f_2 = -f_2'$, on peut écrire $\Delta = \overline{F_1'F_2} = e - (f_1' + f_2')$.

III Des distances focales *f*, *f*′ à la nature de la combinaison

Les distances algébriques entre les foyers et les points principaux, $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$, représentent les distances focales de la combinaison :

- Distance focale objet de la combinaison : $f = \overline{HF} = \dfrac{f_1 f_2}{\Delta}$
- Distance focale image de la combinaison : $f' = \overline{H'F'} = -\dfrac{f'_1 f'_2}{\Delta}$.

La combinaison est convergente si $f' > 0$, divergente si $f' < 0$.
On rappelle que la nature convergente ou divergente d'une combinaison a une influence sur le cheminement du rayon sortant, initialement parallèle à l'axe principal. Ce critère est le même que dans le cas, par exemple, d'une lentille mince de même nature (Figure 22.2). Si le rayon sortant de la combinaison coupe l'axe principal et sort par le demi-plan opposé à celui où il est entré, la combinaison est convergente. Si c'est le prolongement du rayon parallèle incident qui coupe l'axe principal et qu'il sort de la combinaison dans le même demi-plan où il y est rentré, la combinaison est divergente.

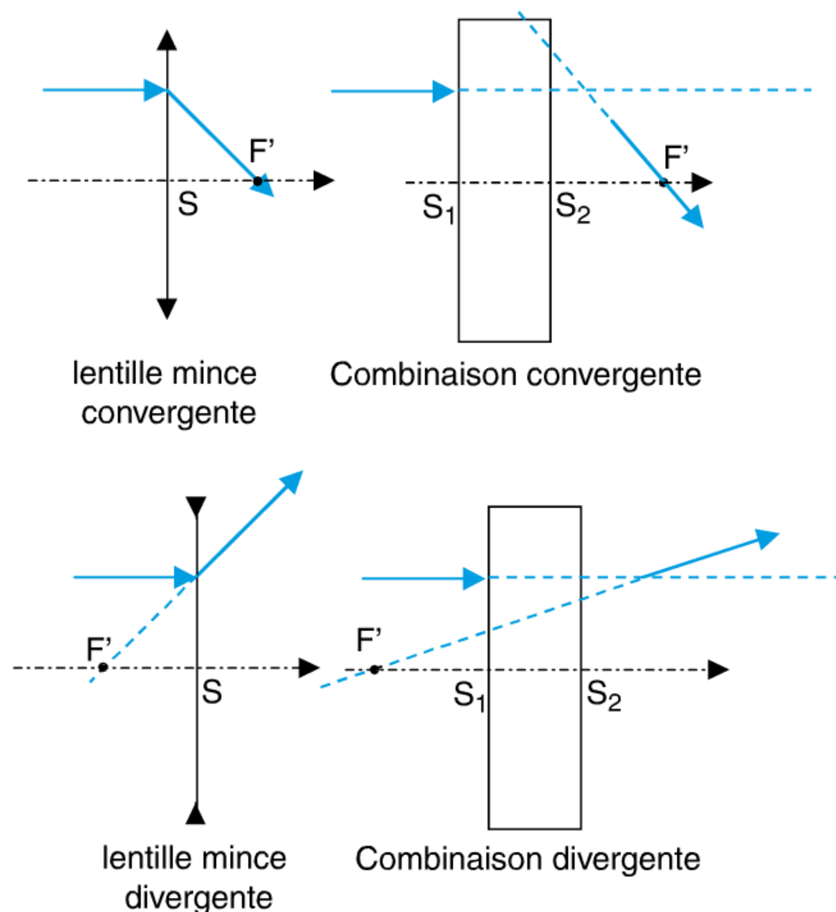


Figure 22.2

IV La position des éléments cardinaux sur l'axe principal

- **Calcul de la position des éléments cardinaux**

Pour placer les quatre éléments cardinaux sur l'axe principal, deux calculs sont possibles. Le premier consiste à positionner les foyers de la combinaison F et F' par rapport aux sommets S_1 et S_2 des deux éléments simples. Ensuite les deux points principaux H et H' ainsi que les plans principaux sont positionnés par rapport à F et F' respectivement en utilisant les expressions des distances focales.

Formulaire 1

$$\overline{S_1F} = \frac{f_1(e+f_2)}{\Delta} \qquad \overline{S_2F'} = \frac{f'_2(e-f'_1)}{\Delta} \qquad \overline{HF} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \qquad \overline{H'F'} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$$

Une autre technique de calcul consiste à positionner le foyer objet de la combinaison, F, par rapport au foyer objet du premier élément, F_1. On repère le foyer image de la combinaison, F', par rapport au foyer image du deuxième élément, F'_2. Les deux points principaux H et H', ainsi que les plans principaux, sont positionnés par rapport à F et F' respectivement en utilisant les expressions des distances focales.

Formulaire 2

$$\overline{F_1F} = \frac{f'_1 f_1}{\Delta} \qquad \overline{F'_2F'} = -\frac{f'_2 f_2}{\Delta} \qquad \overline{HF} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \qquad \overline{H'F'} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$$

- **Recherche de la position des éléments cardinaux par une construction**

On construit tout d'abord la marche d'un rayon incident parallèle à l'axe principal à travers la combinaison (rayon (1) (Figure 22.3)). Il ressort par un rayon (1′) ; celui-ci (ou son prolongement) coupe l'axe en F', foyer image de la combinaison. Puis, on choisit un rayon sortant (2′), parallèle à l'axe principal ; afin de déterminer la position des points principaux, on prendra soin de le choisir à la même distance de l'axe principal que le rayon (1) entrant. Le rayon (2′) est issu d'un rayon (2) avant la combinaison ; ce dernier (ou son prolongement) coupe l'axe principal en F, foyer objet de la combinaison.
Enfin, soient C et C' les deux points où se coupent les rayons incidents (1) et (2) (ou leur prolongement) d'une part et (1′) et (2′) d'autre part (ou leur prolongement). Par construction, C' est l'image conjuguée de C ; leur projection sur l'axe principal sont respectivement les deux points principaux H et H' : en effet, HC et $H'C'$ sont objet et image conjugués, avec un grandissement transversal égal à 1.

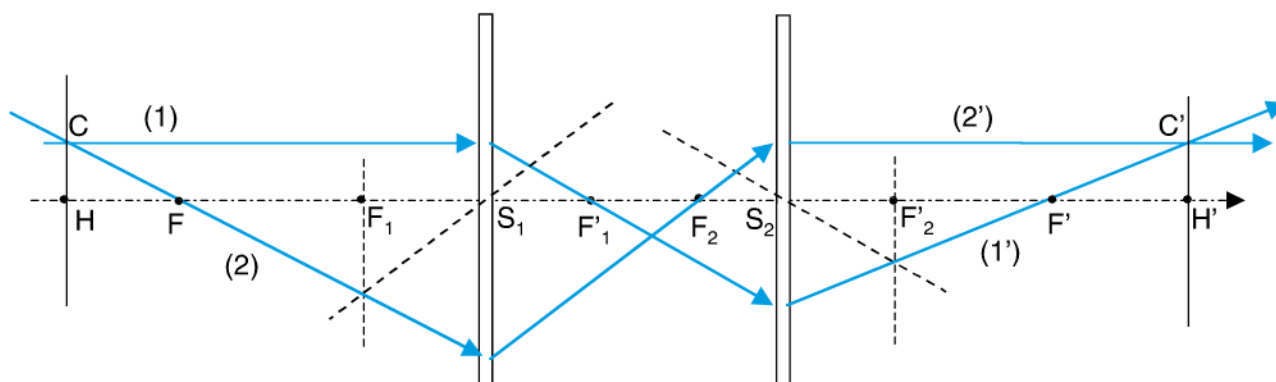


Figure 22.3

Combinaison de deux lentilles minces

Comment déterminer la nature (convergente ou divergente) d'une combinaison de deux lentilles minces dans l'air ?

Solution

Il y a deux méthodes pour déterminer si une combinaison de deux lentilles minces est convergente ou divergente. La première utilise les expressions analytiques de la combinaison ; la seconde est basée sur la construction d'un rayon particulier.

Dans le premier cas, la réponse à la question est donnée par le signe de la distance focale image, f', du doublet. Ce dernier est convergent si $f' > 0$, divergent dans le cas contraire. Rappelons tout d'abord que l'on note f_1' et f_2' les distances focales images des deux lentilles de la combinaison et que l'intervalle optique, Δ, est la distance algébrique entre le foyer image de la première lentille, F_1', et le foyer objet de la deuxième, F_2. On alors $f' = -\dfrac{f_1' f_2'}{\Delta}$. Ainsi, si Δ est positif, la combinaison est divergente si les deux lentilles sont de même nature (toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes) ; si Δ est négatif, c'est le contraire. Elle est convergente si les lentilles sont de nature différente.

La définition du caractère de convergence ou de divergence d'une combinaison est aussi en relation directe avec le comportement d'un rayon initialement parallèle à l'axe optique. La seconde méthode consiste donc à tracer le cheminement d'un tel rayon à travers la combinaison. Si ce rayon s'éloigne de l'axe après la combinaison, cette dernière est divergente. Si au contraire, le rayon se rapproche de l'axe optique et le coupe après avoir traversé la combinaison, cette dernière est convergente. Ce critère est évidemment valable aussi pour un élément simple.

Agrandisseurs et réducteurs de faisceau

On considère la combinaison de deux éléments simples telle que $\Delta = \overline{F_1'F_2} = 0$. On parle de doublet afocal. Quelles sont les caractéristiques d'une telle combinaison ? Donner toutes les configurations possibles d'un doublet afocal et en faire les constructions.

Solution

Si $\Delta = 0$, on a $\overline{S_1F} = \dfrac{f_1(f_2+e)}{\Delta} \to \infty$ et $\overline{S_2F'} = \dfrac{f_2'(e-f_1')}{\Delta} \to \infty$. Les foyers F et F' sont donc rejetés à l'infini et il en est de même pour les points principaux H et H'. Tout rayon incident parallèle à l'axe optique va donc ressortir du système parallèle à l'axe optique. On a par ailleurs $e = \overline{S_1S_2} = \Delta + f_1' + f_2' = f_1' + f_2'$. Comme e est toujours positif, un doublet afocal peut être constitué soit de deux lentilles minces convergentes, soit d'une lentille convergente et d'une divergente (et vice versa). On rappelle que le rôle essentiel d'un doublet afocal est d'agrandir ou de réduire des faisceaux initialement parallèles.

La lentille concentrique

1) On considère deux éléments optiques de sommets S_1 et S_2, séparés d'une distance algébrique positive $e = \overline{S_1S_2}$. Si les distances focales des deux éléments sont respectivement f_1, f_1', f_2 et f_2', et si Δ est l'intervalle optique, démontrer les relations suivantes : $\overline{S_1H} = \dfrac{e}{\Delta} f_1$, $\overline{S_2H'} = \dfrac{e}{\Delta} f_2'$ et $\overline{HH'} = \dfrac{e^2}{\Delta} + \dfrac{e}{\Delta}\left[f_2' + f_2 - (f_1 + f_1')\right]$.
F, F' et H, H' sont respectivement les foyers de la combinaison et ses points principaux.

2) En utilisant l'expression de $\overline{HH'}$ démontrée en question 1), calculer cette quantité pour la lentille épaisse décrite figure 22.4. Montrer que $\overline{HH'} = 0$ si les deux faces de la lentille épaisse sont concentriques.

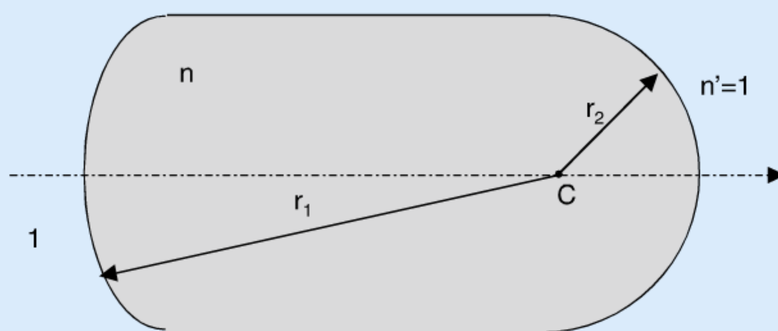


Figure 22.4

Solution

1) Par définition, $\Delta = \overline{F_1'F_2} = e - f_1' + f_2$, $\overline{H'F'} = -\dfrac{f_1'f_2'}{\Delta}$ et $\overline{HF} = \dfrac{f_1f_2}{\Delta}$. On a par ailleurs $\overline{F_1F} = \dfrac{f_1f_1'}{\Delta}$ et $\overline{F_2'F'} = -\dfrac{f_2'f_2}{\Delta}$. On peut écrire :

$$\overline{S_1H} = \overline{S_1F_1} + \overline{F_1F} + \overline{FH} = f_1 + \frac{f_1f_1'}{\Delta} - \frac{f_1f_2}{\Delta} = \frac{f_1}{\Delta}(\Delta + f_1' - f_2) = \frac{ef_1}{\Delta},$$

$$\overline{S_2H'} = \overline{S_2F_2'} + \overline{F_2'F'} + \overline{F'H'} = f_2' - \frac{f_2f_2'}{\Delta} + \frac{f_1'f_2'}{\Delta} = \frac{f_2'}{\Delta}(\Delta + f_1' - f_2) = \frac{ef_2'}{\Delta}$$

et $\overline{HH'} = \overline{HS_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2H'} = -\dfrac{ef_1}{\Delta} + e + \dfrac{ef_2'}{\Delta} = \dfrac{e}{\Delta}(\Delta - f_1 + f_2')$

$$= \frac{e}{\Delta}(e - f_1' + f_2 - f_1 + f_2') = \frac{e^2}{\Delta} + \frac{e}{\Delta}\left[f_2' + f_2 - (f_1 + f_1')\right]$$

2) Les deux dioptres constituant les deux faces de la lentille épaisse d'indice n ont pour sommets S_1 et S_2, et pour rayons de courbure $r_1 < 0$ et $r_2 > 0$. Le premier dioptre sépare deux milieux d'indices respectifs 1 et n ; le deuxième dioptre sépare deux milieux d'indices respectifs n et 1. Leurs distances focales sont :

$$f_1' = \frac{nr_1}{n-1} \qquad f_1 = -\frac{r_1}{n-1} \qquad f_2' = \frac{r_2}{1-n} \qquad f_2 = -\frac{nr_2}{1-n}$$

On a donc $f_2' + f_2 - (f_1 + f_1') = \dfrac{r_2}{1-n}(1-n) - \dfrac{r_1}{n-1}(n-1) = r_2 - r_1$, ce qui permet de déduire que $\overline{HH'} = \dfrac{e^2}{\Delta} + \dfrac{e}{\Delta}[r_2 - r_1] = \dfrac{e}{\Delta}[e + r_2 - r_1]$. La condition $\overline{HH'} = 0$ impose que $e + r_2 - r_1 = 0$, ce qui s'écrit $\overline{S_1S_2} + \overline{S_2C_2} - \overline{S_1C_1} = 0$, qui s'écrit encore $\overline{S_1S_2} + \overline{S_2S_1} + \overline{S_1C_2} - \overline{S_1C_1} = \overline{S_1C_2} + \overline{C_1S_1} = \overline{C_1C_2} = 0$. Finalement, $\overline{HH'} = 0$ si C_1 et C_2 sont confondus ; les deux dioptres sont alors concentriques.

Ne perds pas la boule !

Les lentilles boules sont couramment utilisées pour injecter un faisceau dans une fibre optique. On peut ainsi obtenir des faisceaux de la taille du cœur de la fibre (quelques microns). Une lentille boule peut être décrite comme une combinaison de deux dioptres sphériques (Figure 22.5). Dans cet exercice, on va montrer que la symétrie de ce système donne à son centre, le point O, un rôle particulier.

1) Une boule de rayon r ($r > 0$) et d'indice n' est plongée dans un milieu d'indice n. Déterminer les distances focales f et f' de cette boule ainsi que la position de ses plans principaux H et H' par rapport à son centre O. A quoi peut on assimiler une telle lentille ?

2) Quel effet cela a-t-il de poser une boule de verre sur le caractère d'un article de journal ? On prendra $n' = 1{,}5$ et $n = 1$.

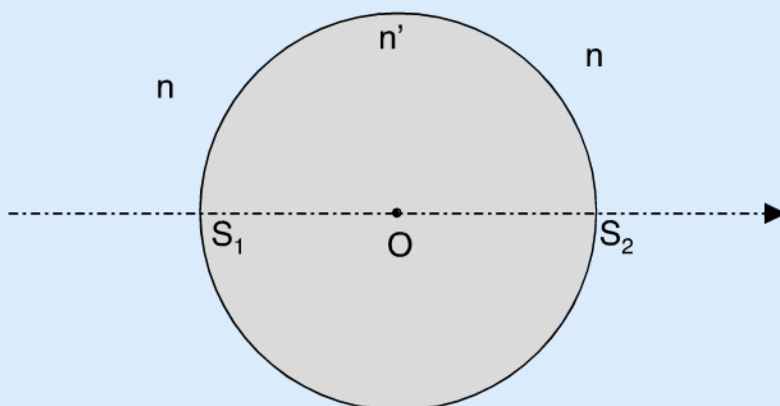


Figure 22.5

Solution

1) Les deux dioptres constituant les deux faces de la lentille boule d'indice n' ont pour sommets S_1 et S_2 et pour rayons de courbure r et $-r$. Le premier dioptre sépare deux milieux d'indices respectifs n et n', et le deuxième dioptre sépare deux milieux d'indices respectifs n' et n. Leurs distances focales sont : $f_1' = \overline{S_1F_1'} = \dfrac{n'r}{n'-n}$, $f_1 = \overline{S_1F_1} = -\dfrac{nr}{n'-n}$, $f_2' = \overline{S_2F_2'} = \dfrac{n(-r)}{n-n'} = -f_1$ et $f_2 = \overline{S_2F_2} = -\dfrac{n'(-r)}{n-n'} = -f_1'$. On a donc $\Delta = e - f_1' + f_2 = 2r - \dfrac{2n'r}{n'-n} = -\dfrac{2nr}{n'-n}$, $\overline{F_2'F'} = -\dfrac{f_2'f_2}{\Delta} = -\dfrac{n'r}{2(n'-n)}$ et $\overline{F_1F} = \dfrac{f_1'f_1}{\Delta} = \dfrac{n'r}{2(n'-n)}$. On déduit que

$$f' = \overline{H'F'} = -\frac{f_2'f_1'}{\Delta} = \frac{n'r}{2(n'-n)} \quad \text{et} \quad f = \overline{HF} = \frac{f_2f_1}{\Delta} = -\frac{n'r}{2(n'-n)} = -f'.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\overline{S_2H'} &= \overline{S_2F_2'} + \overline{F_2'F'} + \overline{F'H'} = f_2' + \overline{F_2'F'} - f' \\ &= \frac{nr}{n'-n} - \frac{n'r}{2(n'-n)} - \frac{n'r}{2(n'-n)} = \frac{nr}{n'-n} - \frac{n'r}{n'-n} = -r\end{aligned}$$

et $\overline{OH'} = \overline{OS_2} + \overline{S_2H'} = r - r = 0$. De même, $\overline{S_1H} = \overline{S_1F_1} + \overline{F_1F} + \overline{FH} = -\dfrac{nr}{n'-n} + \dfrac{n'r}{2(n'-n)} + \dfrac{n'r}{2(n'-n)} = r$ et $\overline{OH} = \overline{OS_1} + \overline{S_1H} = r - r = 0$. Les plans principaux H et H' d'une lentille boule sont donc confondus avec son centre O,

ce qui permet de la réduire à une lentille mince placée en O de distance focale $f = \overline{OF} = -f' = -\overline{OF'}$. Ce résultat n'est pas surprenant car une lentille boule est avant tout une lentille concentrique (voir exercice précédent).

2) Si $n = 1$ et $n' = 1{,}5$, la distance focale image de la lentille boule $f' = \dfrac{3r}{2} > 0$. Cette lentille est donc convergente. Si l'on pose cette boule de verre sur un caractère de journal, ce dernier constitue un objet réel positionné à $p = -r$ du centre O de la boule. La position de l'image obtenue est déduite de la relation de conjugaison de la lentille mince équivalente $\dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{f'}$ soit $p' = \dfrac{pf'}{p + f'} = \dfrac{(-r)\left(\dfrac{3r}{2}\right)}{-r + \dfrac{3r}{2}} = -3r$.

L'image est donc virtuelle, de grandissement transversal $\gamma = \dfrac{p'}{p} = 3$. La boule de verre grossit donc le caractère de journal sans l'inverser.

La paroi d'un aquarium

La paroi d'un aquarium est constituée de deux dioptres sphériques concentriques de rayons R et $R + \delta$. Ils séparent successivement des milieux d'indice 4/3 (eau), 3/2 (verre) et 1 (air) (Figure 22.6).

On donne $R = 20$ cm et $\delta = 1$ cm.

1) Déterminer les distances focales f_1', f_1, f_2' et f_2 des deux dioptres qui constituent la paroi de l'aquarium. En déduire l'expression des distances focales de la combinaison f et f'. Les calculer.

2) *Paroi de l'aquarium d'épaisseur* $\delta \neq 0$

A l'aide des formules des combinaisons, donner l'expression de $\overline{F_1F}$, $\overline{F_2'F'}$, $\overline{S_1F}$, $\overline{S_2F'}$, $\overline{HH'}$, $\overline{S_2H'}$. Les calculer.

3) *Paroi de l'aquarium d'épaisseur nulle*

Donner les expressions et les valeurs numériques des quantités déterminées dans les questions précédentes si $\delta = 0$.

4) Sur une figure, placer les foyers F et F' ainsi que les deux plans principaux H et H' dans les deux situations ($\delta \neq 0$, puis $\delta = 0$). Comparer les deux situations.

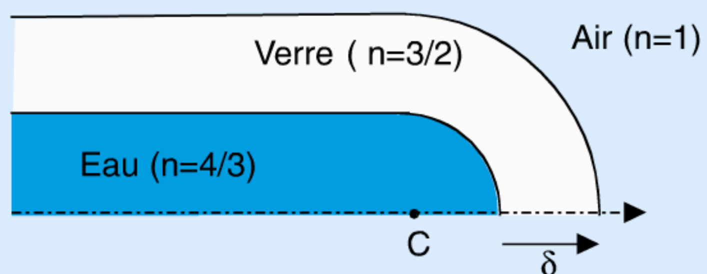


Figure 22.6

Solution

1) Le dioptre 1 a pour rayon de courbure $r_1 = -R = -20$ cm et sépare deux milieux d'indices respectifs $n_1 = 4/3$ et $n'_1 = 3/2$. Le dioptre 2 a pour rayon de courbure $r_2 = -(R+\delta) = -21$ cm et sépare deux milieux d'indices respectifs $n_1 = 3/2$ et $n'_2 = 1$. Leurs distances focales sont donc :

$$f_1 = \overline{S_1F_1} = \frac{-n_1r_1}{n'_1 - n_1} = 8R = 160 \text{ cm},$$

$$f'_1 = \overline{S_1F'_1} = \frac{n'_1r_1}{n'_1 - n_1} = -9R = -180 \text{ cm},$$

$$f_2 = \overline{S_2F_2} = \frac{-n_2r_2}{n'_2 - n_2} = -3(R+\delta) = -63 \text{ cm}$$

et $$f'_2 = \overline{S_2F'_2} = \frac{n'_2r_2}{n'_2 - n_2} = 2(R+\delta) = 42 \text{ cm}.$$

On remarque que le premier dioptre est divergent alors que le deuxième est convergent. Leur combinaison, d'épaisseur $e = \delta = 1$ cm, a pour intervalle optique $\Delta = \delta - f'_1 + f_2 = 2(3R - \delta) = 118$ cm. On a donc $f = \overline{HF} = \dfrac{f_1 f_2}{\Delta}$ $= -12R\dfrac{R+\delta}{3R-\delta} = -85{,}42$ cm et $f' = \overline{H'F'} = -\dfrac{f'_2 f'_1}{\Delta} = 9R\dfrac{R+\delta}{3R-\delta} = 64{,}07$ cm.

Le fait que les milieux extrêmes situés de part et d'autre de la paroi de l'aquarium ne soient pas identiques entraîne que $f \neq f'$.

2) *Paroi d'aquarium d'épaisseur $\delta \neq 0$:*

$$\overline{F_1F} = \frac{f'_1 f_1}{\Delta} = -\frac{36R^2}{3R-\delta} = -244{,}07 \text{ cm},$$

$$\overline{F'_2F'} = -\frac{f'_2 f_2}{\Delta} = \frac{3(R+\delta)^2}{3R-\delta} = 22{,}42 \text{ cm},$$

$$\overline{S_1F} = \frac{f_1(e+f_2)}{\Delta} = -\frac{4R(3R+2\delta)}{3R-\delta} = -84{,}07 \text{ cm ;}$$

$$\overline{S_2F'} = \frac{f'_2(e-f'_1)}{\Delta} = \frac{(R+\delta)(9R+\delta)}{3R-\delta} = 64{,}42 \text{ cm}$$

et $$\overline{HH'} = \overline{HF} + \overline{FS_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2F'} + \overline{F'H'} = e + f - f' + \overline{FS_1} + \overline{S_2F'} = 0$$

après simplification.

Les points principaux H et H' de la paroi de l'aquarium d'épaisseur δ sont donc confondus. Il en est bien sûr de même des plans principaux. Enfin, $\overline{S_2H'} = \overline{S_2F'} + \overline{F'H'} = \delta\dfrac{R+\delta}{3R-\delta} = 0{,}35$ cm.

3) *Paroi d'aquarium d'épaisseur nulle* :
Si $\delta = 0$, on trouve, à partir des formules de la question précédente, $f_2 = -3R = -60$ cm, $f'_2 = 2R = 40$ cm, $f = -4R = -80$ cm, $f' = 3R = 60$ cm, $\overline{F_1F} = -12R = -240$ cm, $\overline{F'_2F'} = R = 20$ cm, $\overline{S_1F} = -4R = -80$ cm, $\overline{S_2F'} = 3R = 60$ cm et $\overline{S_2H'} = 0$. $\overline{HH'} = f - f' + \overline{FS_1} + \overline{S_2F'} = 0$: les points principaux H et H' de la paroi de l'aquarium d'épaisseur nulle sont toujours confondus.

4) La figure 22.7 donne la position des foyers F et F' ainsi que celle des points principaux H et H' pour une paroi d'aquarium d'épaisseur $\delta \neq 0$ (Figure 22.7a) ainsi que pour une paroi d'aquarium d'épaisseur nulle (Figure 22.7b). Elle permet de retrouver l'effet de l'épaisseur δ de la paroi de l'aquarium sur la position des foyers F et F' et le fait que les points principaux H et H' restent confondus.

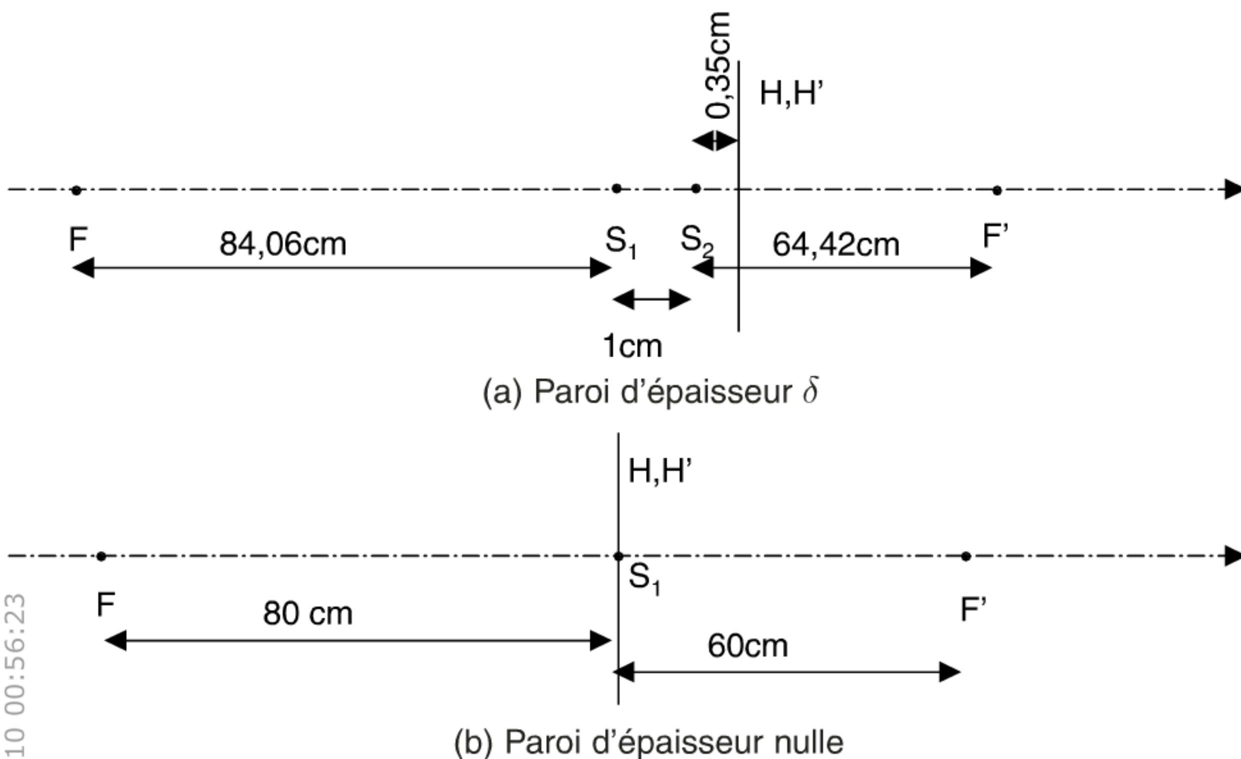


Figure 22.7

FICHE 23

Vergence d'une combinaison et formule de Gullstrand

I Vergence d'une combinaison, ϕ

Dans les fiches précédentes, nous avons défini la vergence d'éléments simples. On rappelle qu'elle est nulle dans le cas d'un dioptre plan ou d'un miroir plan. Pour un dioptre sphérique de rayon de courbure r, séparant deux milieux d'indices respectifs n et n', $\phi = \dfrac{n'-n}{r}$; pour un miroir sphérique de rayon de courbure r, $\phi = \dfrac{2}{r}$. Enfin, pour une lentille mince d'indice n et dont les deux faces ont respectivement pour rayon de courbure r et r', $\phi = (n-1)\left(\dfrac{1}{r'} - \dfrac{1}{r}\right)$.

Pour chacun de ces systèmes simples, la vergence ϕ est reliée à la distance focale image f' : si les milieux, de part et d'autre du système, sont identiques, $\phi = \dfrac{1}{f'}$; c'est le cas du miroir sphérique et des lentilles minces. Au contraire, pour un dioptre sphérique, qui sépare deux milieux d'indices n et n', $\phi = \dfrac{n'}{f'}$.

II La formule de Gullstrand

On rappelle que la distance focale f' d'une combinaison d'épaisseur e s'écrit (voir fiche 22) : $f' = \dfrac{-f_1' f_2'}{\Delta}$, où f_1' et f_2' sont les distances focales images des deux éléments simples et Δ l'intervalle optique ($\Delta = e - f_1' + f_2$). La vergence d'une combinaison s'écrit donc : $\phi = \dfrac{1}{f'} = \dfrac{-\Delta}{f_1' f_2'}$, soit, après simplification,

$$\phi = \frac{-f_2}{f_1' f_2'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1' f_2'}.$$

- **Application à la combinaison de deux lentilles minces (figure 23.1)**

Si l'on étudie la combinaison de deux lentilles dans l'air, sachant que, pour $i = 1$ ou 2, $f_i = -f'_i$, la vergence de la combinaison devient $\phi = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}$.

Si $\phi_i = \frac{1}{f'_i}$ est la vergence de la lentille i, on obtient la formule de Gullstrand :

$$\boxed{\phi = \phi_1 + \phi_2 - e\phi_1\phi_2}$$

Toutes les vergences doivent être exprimées en dioptries (symbole δ) ou en m^{-1}.

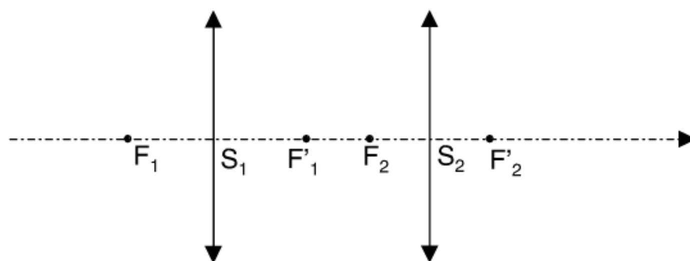


Figure 23.1

- **Application à la combinaison de deux dioptres sphériques (figure 23.2)**

Considérons à présent la combinaison de deux dioptres séparant deux milieux d'indices respectifs n et 1 ; le milieu d'indice n est situé entre les deux dioptres. On a $f'_1 = -nf_1$ et $f'_2 = \frac{f_2}{n}$ et la vergence de cette combinaison s'écrit $\phi = \frac{-f_2}{f'_1 f'_2} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2} = \frac{n}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}$. En remarquant que les vergences des deux dioptres de la combinaison sont respectivement $\phi_1 = \frac{n}{f'_1}$ et $\phi_2 = \frac{1}{f'_2}$, on peut écrire la formule de Gullstrand pour ce type de combinaison :

$$\boxed{\phi = \phi_1 + \phi_2 - e\frac{\phi_1\phi_2}{n}}$$

Toutes les vergences doivent ici être exprimées en dioptries (symbole δ) ou en m^{-1}.

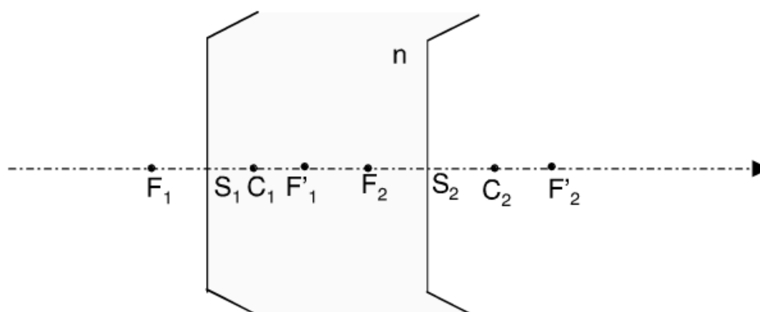


Figure 23.2

III Combinaison de deux éléments accolés

Si deux éléments sont accolés, l'épaisseur de leur combinaison est nulle ($e = 0$) et

$$\phi = \phi_1 + \phi_2.$$

La vergence de deux lentilles minces accolées s'écrit donc $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{f'_1} + \dfrac{1}{f'_2}$, et celle de deux dioptres sphériques accolés : $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{n}{f'_1} + \dfrac{1}{f'_2}$.

IV La vergence et la nature de la combinaison

Quelle que soit la combinaison étudiée, elle est convergente si $\phi = \dfrac{1}{f'} > 0$ et divergente dans le cas contraire ($\phi < 0$).

La boule au cœur vide

Une boule de rayon R et d'indice n possède un cœur vide de rayon r. On considère que la boule est constituée de deux moitiés identiques représentées respectivement figure 23.3a et figure 23.3b.

1) *Étude de la première moitié*

La première moitié est constituée de deux dioptres sphériques de centre O et de sommets S_1 et S_2. À l'aide des formules des combinaisons, déterminer les quantités algébriques $f' = \overline{H'F'}$, $f = \overline{HF}$, $\overline{HH'}$ et $\overline{OH'}$. Que constatez-vous pour H et H' et où se trouvent-ils ? À quel système simple peut-on réduire cette moitié de boule. Déterminer sa vergence.

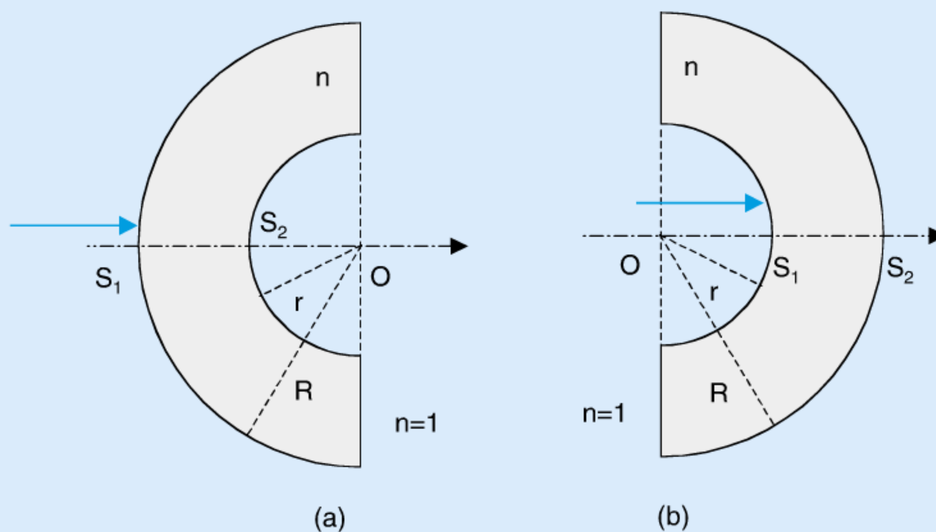


Figure 23.3

2) *Étude de la seconde moitié*

En utilisant les formules déterminées dans la question précédente, déterminer (sans calcul) les mêmes quantités pour cette seconde moitié de la boule. Où se trouvent ses plans principaux et quelle est sa vergence ?

3) On forme avec les deux moitiés précédentes une boule au cœur vide. Montrer que l'on obtient ainsi une combinaison de deux lentilles minces de même vergence accolées au point O. Quelle est la vergence de cette boule au cœur vide ?

Solution

1) *Étude de la première moitié (figure 23.3a)* :

Le premier dioptre de rayon de courbure R sépare un milieu d'indice 1 d'un milieu d'indice n. Le deuxième dioptre a pour rayon de courbure r et sépare un milieu d'indice n d'un autre d'indice 1. Les distances focales des deux dioptres de la première moitié de la boule sont donc : $f_1' = \overline{S_1F_1'} = \dfrac{nR}{n-1}$, $f_1 = \overline{S_1F_1} = \dfrac{-R}{n-1}$, $f_2' = \overline{S_2F_2'} = \dfrac{r}{1-n} = \dfrac{-r}{n-1}$ et $f_2 = \overline{S_2F_2} = \dfrac{-nr}{1-n} = \dfrac{nr}{n-1}$.

D'autre part, l'épaisseur de la première moitié est $\overline{S_1S_2} = \overline{S_1O} + \overline{OS_2} = e = R - r$ et son intervalle optique $\Delta = e - f_1' + f_2 = \dfrac{r-R}{n-1}$. Les éléments cardinaux de la première moitié sont donc reliés par les relations suivantes : $f' = \overline{HF'} = -\dfrac{f_1'f_2'}{\Delta}$ $= \dfrac{nRr}{(n-1)(r-R)}$ et $f = \overline{HF} = \dfrac{f_1f_2}{\Delta} = -\dfrac{nRr}{(n-1)(r-R)} = -f'$.

Par ailleurs, $\overline{HH'} = \overline{HF} + \overline{FF_1} + \overline{F_1S_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2F_2'} + \overline{F_2'F'} + \overline{F'H'}$ ce qui s'écrit $\overline{HH'} = 2f + \overline{FF_1} + -f_1 + e + f_2' + \overline{F_2'F'}$.

Or $\overline{F_1F} = \dfrac{f_1f_1'}{\Delta} = -\dfrac{nR^2}{(n-1)(r-R)}$ et $\overline{F_2'F'} = \dfrac{-f_2f_2'}{\Delta} = \dfrac{nr^2}{(n-1)(r-R)}$, donc

$$\overline{HH'} = -\frac{nRr}{(n-1)(r-R)} + \frac{nR^2}{(n-1)(r-R)} + \frac{R}{(n-1)} + (R-r) - \frac{r}{(n-1)}$$
$$+ \frac{nr^2}{(n-1)(r-R)} - \frac{nRr}{(n-1)(r-R)}$$

$$\overline{HH'} = \frac{nR^2 + nr^2 - 2nRr}{(n-1)(r-R)} + \frac{R-r}{n-1} + (R-r) = \frac{nR^2 + nr^2 - 2nRr}{(n-1)(r-R)} + \frac{n(R-r)}{(n-1)}$$

$$= \frac{nR^2 + nr^2 - 2nRr - n(R-r)^2}{(n-1)(r-R)} = 0$$

De même, $\overline{OH'} = \overline{OS_2} + \overline{S_2F_2'} + \overline{F_2'F'} + \overline{F'H'} = -r + f_2' + \overline{F_2'F'} - f'$ soit

$$\overline{OH'} = -r - \frac{r}{n-1} + \frac{nr^2}{(n-1)(r-R)} + \frac{-nRr}{(n-1)(R-r)}$$

$$= \frac{-r(r-R)(n-1) - r(r-R) + nr^2 - nRr}{(r-R)(n-1)} = \frac{-r(r-R)n + nr^2 - nRr}{(r-R)(n-1)} = 0$$

Les point H et H' sont confondus en O. La première moitié de la boule creuse est donc assimilable à une lentille mince placée en O, de vergence $\phi = \frac{1}{f'} = \frac{(n-1)(r-R)}{nRr}$.

2) *Étude de la seconde moitié (figure 23.3b)*

Le premier dioptre de rayon de courbure $-r$ et sépare un milieu d'indice 1 d'un milieu d'indice n. Le deuxième dioptre a pour rayon de courbure $-R$ et sépare un milieu d'indice n d'un autre d'indice 1. Ce deuxième élément simple est donc le symétrique par rapport à O de celui étudié en première question. Par raison de symétrie, ses points principaux H et H' sont donc aussi confondus en O. Ses distances focales sont les mêmes que celles de la première moitié. En effet, on peut vérifier aisément que les caractéristiques d'un système retourné ne sont pas modifiées.
La seconde moitié de la boule creuse est donc assimilable aussi à une lentille mince placée en O, de vergence $\phi = \frac{1}{f'} = \frac{(n-1)(r-R)}{nRr}$.

3) Si l'on assemble les deux éléments précédents, on obtient une boule au cœur creux. Cette dernière est donc assimilable à une combinaison de deux lentilles minces de même sommet O et accolées. La vergence de ce système est donc égale à $2\phi = \frac{2(n-1)(r-R)}{nRr}$.

Jeux de combinaisons de deux lentilles

On constitue plusieurs combinaisons à partir de deux lentilles minces convergentes de distances focales images $f_1' = 1$ m et $f_2' = 0{,}5$ m ($f_2' < f_1'$). Déterminer l'expression et la valeur de l'épaisseur e et de la divergence ϕ de ces combinaisons de telle façon que :

1) La vergence totale soit égale à

a) la somme des vergences

b) la différence des vergences

c) la demi somme des vergences

d) zéro

2) la distance focale totale soit égale à

a) la somme des distances focales

b) la différence des distances focales

Solution

1) La vergence de la combinaison de deux lentilles minces entourées d'air et séparées de la distance e est donnée par la formule de Gullstrand qui s'écrit :

$\phi = \phi_1 + \phi_2 - e\phi_1\phi_2$ où $\phi_1 = \frac{1}{f'_1}$, $\phi_2 = \frac{1}{f'_2}$ et $\phi = \frac{1}{f'}$. Si $f'_1 = 1$ m et $f'_2 = 0{,}5$ m, $\phi_1 = 1\,\delta$ et $\phi_2 = 2\,\delta$.

a) Si $\phi = \phi_1 + \phi_2 - e\phi\phi_2 = \phi_1 + \phi_2$, on déduit que $e = 0$ et $\phi = 3\,\delta$.

b) Si $\phi = \phi_1 + \phi_2 - e\phi_1\phi_2 = \phi_2 - \phi_1$, on déduit que $e = \frac{2}{\phi_2} = 1$ m et $\phi = 1\,\delta$.

Si $\phi = \phi_1 + \phi_2 - e\phi_1\phi_2 = \phi_1 - \phi_2$, on déduit que $e = \frac{2}{\phi_1} = 2$ m et $\phi = -1\,\delta$.

c) Si $\phi = \phi_1 + \phi_2 - e\phi_1\phi_2 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$, alors $e = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2\phi_1\phi_2} = 0{,}75$ m et $\phi = \frac{3}{2}\delta$.

d) Si $\phi = \phi_1 + \phi_2 - e\phi_1\phi_2 = 0$, alors $e = \frac{\phi_1 + \phi_2}{\phi_1\phi_2} = 1{,}5$ m.

2)

a) Si $f' = f'_1 + f'_2$, alors $\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_1} + \frac{1}{\phi_2}$ soit encore $\phi = \frac{\phi_1\phi_2}{\phi_1 + \phi_2}$. Il faut donc résoudre : $\phi = \phi_1 + \phi_2 - e\phi_1\phi_2 = \frac{\phi_1\phi_2}{\phi_1 + \phi_2}$; on en déduit que $e = \frac{\phi_1 + \phi_2}{\phi_1\phi_2} - \frac{1}{\phi_1 + \phi_2} = 1{,}17$ m et $\phi = \frac{2}{3}\,\delta$.

b) Si $f' = f'_1 - f'_2$, alors $\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_1} - \frac{1}{\phi_2}$ soit encore $\frac{1}{\phi} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_1\phi_2}$ et $\phi = \frac{\phi_1\phi_2}{\phi_2 - \phi_1}$. Il faut donc résoudre : $\phi = \phi_1 + \phi_2 - e\phi_1\phi_2 = \frac{\phi_1\phi_2}{\phi_2 - \phi_1}$, on en déduit que $e = \frac{\phi_1 + \phi_2}{\phi_1\phi_2} - \frac{1}{\phi_2 - \phi_1} = 0{,}5$ m et $\phi = 2\,\delta$.

De même, si $f' = f'_2 - f'_1$, alors $\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_2} - \frac{1}{\phi_1}$ et $\phi = \frac{\phi_1\phi_2}{\phi_1 - \phi_2} = \phi_1 + \phi_2 - e\phi_1\phi_2$.

On en déduit que $e = \frac{\phi_1 + \phi_2}{\phi_1\phi_2} - \frac{1}{\phi_1 - \phi_2} = 2{,}5$ m et $\phi = -2\,\delta$.

FICHE 24

Formation d'images à travers une combinaison

I La relation de conjugaison

Pour une combinaison, le foyer objet F, le foyer image F' et les deux points principaux H et H' constituent les quatre éléments cardinaux que l'on va utiliser pour construire directement l'image finale d'un objet.
Le première méthode est calculatoire et utilise la relation de conjugaison d'une combinaison, définie par :

$$\boxed{\frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} = 1}$$

où $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$ sont respectivement les distances focale objet f et image f' de la combinaison.

- $\overline{HA}$ est la position de l'objet AB sur l'axe principal, repérée par rapport au point principal objet H ;
- $\overline{H'A'}$ est la position sur l'axe principal de l'image finale $A'B'$ à travers la combinaison, repérée sur l'axe principal par rapport au point principal image H'.

Si l'on pose $\overline{HA} = p$ et $\overline{H'A'} = p'$, la relation de conjugaison de la combinaison s'écrit encore, sous la forme de la relation de Descartes :

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$$

ou, sous la forme de la relation de Newton :

$$ff' = (p - f)(p' - f')$$

La relation de conjugaison d'une combinaison relie là encore la position d'un objet positionné en A sur l'axe principal à celle de son image conjuguée repérée par A'. C'est exactement la même situation que pour les éléments simples. Cependant, remarquons que les positions d'un objet et de son image à travers une combinaison sont repérés par rapport à deux points différents, H et H' respectivement, et non plus par rapport à un point unique, le sommet, qui, ici, n'a plus de sens.

Rappel : si les milieux extrêmes de la combinaison sont identiques, ses distances focales image et objet sont opposées : $f' = -f$ et sa vergence s'écrit : $\phi = \frac{1}{f'} = \frac{-1}{f}$, comme pour les systèmes simples.

II La construction d'images

La méthode de construction de l'image finale d'un objet à travers une combinaison utilise, comme la méthode de calcul, les quatre éléments cardinaux F, F', H et H'.
Avant de procéder à la construction d'une image, il faut donc avoir déterminé la position des quatre éléments cardinaux sur l'axe principal et tracer les plans principaux objet et image, plans perpendiculaires à l'axe principal passant respectivement par H et H'.
La méthode de construction d'images repose toujours sur le choix de deux rayons particuliers issus du point B de l'objet AB.

Rappel : l'image d'un objet, placé dans le plan principal objet, appartient au plan principal image passant par H', avec un grandissement transversal égal à 1.
Pour une combinaison, nous recommandons le choix des deux rayons suivants (Figure 24.1) :

- Le rayon incident (1), parallèle à l'axe principal, coupe le plan principal objet passant par H au point C. Ce rayon est prolongé (en pointillés) parallèlement à l'axe principal jusqu'à C', situé dans le plan principal image passant par H', de telle manière que $\overline{HC} = \overline{H'C'}$ $(\gamma = 1)$. Le rayon incident (1) et son prolongement en pointillés passent donc par C et C'. À partir du point C', le rayon $(1')$ émerge de la combinaison et coupe l'axe principal en F', foyer image de la combinaison.

- Le rayon incident (2) coupe l'axe principal au foyer objet F de la combinaison. Il atteint le plan principal objet, qui passe par H, en un point D. On le prolonge en pointillés parallèlement à l'axe principal jusqu'au plan principal image, qui passe par H' qu'il coupe en D' de telle manière que $\overline{HD} = \overline{H'D'}$ $(\gamma = 1)$. Le rayon $(2')$ émerge alors de la combinaison parallèlement à l'axe principal. Ce rayon et son prolongement passent par D et D'.

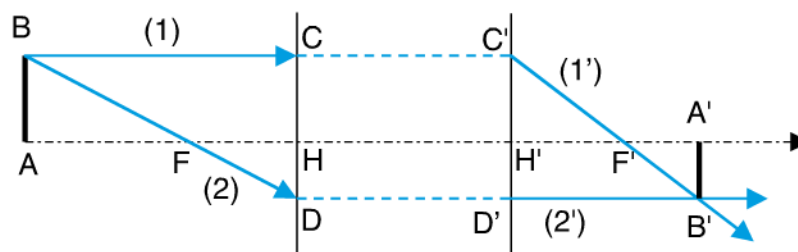


Figure 24.1

Les deux rayons émergents (1′) et (2′) (ou leurs prolongements) se croisent au point B'. En abaissant à partir de B' la perpendiculaire à l'axe principal, on trouve l'image $A'B'$.

III La nature des images

La construction à l'aide des éléments cardinaux ne permet pas de déterminer si l'image $A'B'$ est réelle ou virtuelle.
En fait, comme pour les éléments simples, un objet placé devant une combinaison est réel si sa position sur l'axe principal est située devant le premier élément optique de la combinaison ; dans le cas contraire, il est virtuel.
La nature de l'image finale à travers une combinaison dépend aussi de sa position par rapport aux éléments optiques. Une image $A'B'$ est réelle si elle est située après le deuxième élément optique de la combinaison ; dans le cas contraire, elle est virtuelle.

IV Le grandissement transversal

Le grandissement transversal caractérise la taille et le sens de l'image finale d'un objet à travers une combinaison ; il s'écrit :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{p'f}{pf'}$$

Si les milieux extrêmes de la combinaison sont identiques $f' = -f$ et $\gamma = \dfrac{p'}{p}$

On rappelle que, si $\gamma < 0$, l'image est renversée ; elle est droite dans le cas contraire ($\gamma > 0$). Si $|\gamma| < 1$, l'image est plus petite que l'objet ; elle est agrandie si $|\gamma| > 1$.

V Le grandissement longitudinal

Pour une combinaison, le grandissement longitudinal g s'écrit :

$$g = -\gamma^2 \frac{f'}{f} = -\left(\frac{p'}{p}\right)^2 \frac{f}{f'}$$

Si les **milieux extrêmes** de la combinaison sont identiques $f' = -f$ et

$$g = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = \gamma^2$$

L'oculaire

Un oculaire est une combinaison de deux lentilles minces de distances focales images f'_1 et f'_2 dont les sommets S_1 et S_2 sont séparés de l'épaisseur algébrique $e = \overline{S_1 S_2}$. On définit un oculaire avec trois entiers, (l,m,n), définis par : $a = \dfrac{f'_1}{l} = \dfrac{e}{m} = \dfrac{f'_2}{n}$ où a est positif.

1) Déterminer les quantités algébriques Δ, $\overline{F_1 F}$, $\overline{F'_2 F'}$, $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$ qui permettent de positionner les quatre éléments cardinaux F, F', H et H' d'un oculaire en fonction de a, l, m et n.

2) Calculer ces quantités algébriques en fonction de a pour un oculaire de Huygens (4, 3, 2). Est-il convergent ?

3) Déterminer la position de l'image à travers l'oculaire de Huygens d'un objet réel AB filiforme, placé à une distance algébrique $p = -3f'$, où f' est la distance focale image de l'oculaire. Commenter ce résultat.

4) Déterminer le grandissement transversal γ de cette image. Commenter ce résultat.

Solution

1) Pour un oculaire on a : $e = ma$, $f'_1 = la = -f_1$ et $f'_2 = na = -f_2$. On a donc

$$\Delta = \overline{F'_1 F_2} = e - f'_1 + f_2 = e - (f'_1 + f'_2) = -a(l - m + n)\,,$$

$$\overline{F_1 F} = \frac{f'_1 f_1}{\Delta} = \frac{-f'^2_1}{\Delta} = \frac{l^2 a}{l-m+n},\ \overline{F'_2 F'} = \frac{-f_2 f'_2}{\Delta} = \frac{f'^2_2}{\Delta} = -\frac{n^2 a}{l-m+n},$$

$$\overline{H'F'} = \frac{-f'_1 f'_2}{\Delta} = \frac{lan}{l-m+n} \text{ et } \overline{HF} = -\frac{lan}{l-m+n} = -\overline{H'F'}\,.$$

2) Pour un oculaire de Huygens (4, 3, 2), $a = \dfrac{f'_1}{4} = \dfrac{e}{3} = \dfrac{f'_2}{2}$; on a donc en posant simplement $l = 4$, $m = 3$ et $n = 2$ dans les formules précédentes :

$$\Delta = -3a,\ \overline{F_1 F} = -\frac{16a}{3},\ \overline{F'_2 F'} = \frac{4a}{3},\ \overline{H'F'} = \frac{8a}{3} = f' \text{ et } \overline{HF} = -\frac{8a}{3} = -\overline{H'F'} = f.$$

Comme $f' > 0$, l'oculaire de Huygens est convergent.

3) La position de l'image d'un objet peut être déterminée par la relation de conjugaison. Dans le cas de l'oculaire de Huygens, la relation de conjugaison s'écrit : $\dfrac{f'}{p'} + \dfrac{f}{p} = 1$. Avec $f' = -f = \dfrac{8a}{3}$ et $p = -3f' = -8a$, on déduit la position de l'image $p' = \dfrac{pf'}{p-f} = \dfrac{pf'}{p+f'} = \dfrac{(-8a)\frac{8a}{3}}{-8a+\frac{8a}{3}} = 4a = \dfrac{3}{2}f'$. $p' > 0$ et l'image est réelle.

4) Le grandissement d'un oculaire, pour lequel $f' = -f$, est $\gamma = \dfrac{p'}{p}$. Avec $p = -8a$ et $p' = 4a$, on a donc $\gamma = -\dfrac{1}{2}$. L'image réelle est renversée et deux fois plus petite que l'objet.

Combinaison de deux lentilles identiques

Soit une lentille mince convergente, de distance focale image $f'_1 = 9$ cm, suivie d'une autre lentille identique ($f'_2 = 9$ cm) dont les sommets S_1 et S_2 sont séparés d'une épaisseur $e = 4$ cm.

1) Calculer les quantités algébriques $\overline{F'_2F'}$, $\overline{F_1F}$, $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$ qui permettent de positionner les quatre éléments cardinaux F, F', H et H', situés de part et d'autre des deux lentilles. Retrouver leurs positions par une construction. On tracera dans un premier temps la marche d'un rayon sortant parallèlement à l'axe optique, puis celle d'un rayon entrant parallèlement à l'axe optique.

2) Quelle est la position d'un objet AB dont l'image finale $A'B'$ à travers la combinaison se trouve à 10 cm à droite de la deuxième lentille ? On utilisera une méthode calculatoire puis une construction.

3) Quelle est la taille de l'image $A'B'$ si $\overline{AB} = 2$ cm ?

Solution

1) On a $f'_1 = f'_2, f'_1 = -f_1$ et $f'_2 = -f_2$ donc $\Delta = \overline{F'_1F_2} = e - (f'_1 + f'_2) = e - 2f'_1$

$= -14$ cm, $\overline{F_1F} = \dfrac{f'_1 f_1}{\Delta} = -\dfrac{f'^2_1}{\Delta} = \dfrac{81}{14}$ cm $= 5{,}78$ cm,

$\overline{F'_2F'} = -\dfrac{f'_2 f_2}{\Delta} = \dfrac{f'^2_2}{\Delta} = -\dfrac{81}{14} = -5{,}78$ cm, $\overline{H'F'} = -\dfrac{f'_1 f'_2}{\Delta} = -\dfrac{f'^2_1}{\Delta} = \dfrac{81}{14}$ cm $= 5{,}78$ cm

et $\overline{HF} = -\overline{H'F'} = -\dfrac{81}{14}$ cm $= -5{,}78$ cm.

Figure 24.2a

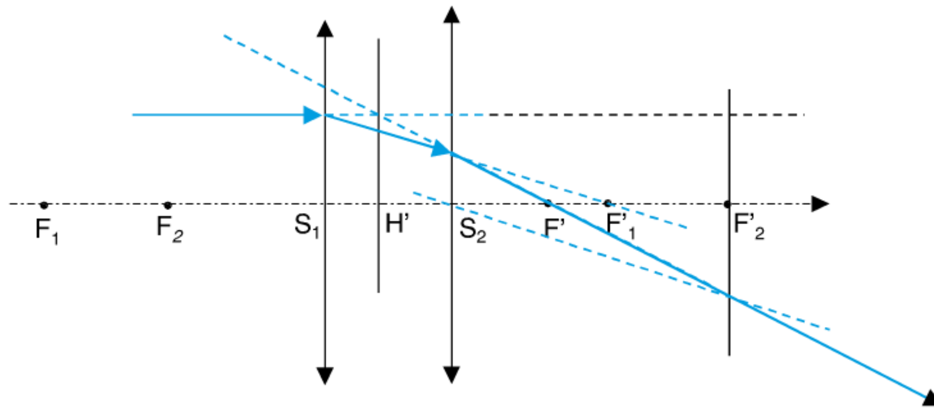


Figure 24.2b

La Figure 24.2a présente la construction d'un rayon sortant parallèle à l'axe optique permettant de trouver les positions des éléments cardinaux F et H. La Figure 24.2b présente la construction d'un rayon incident parallèle à l'axe principal permettant de trouver les positions des éléments cardinaux F' et H'.

2) Méthode calculatoire : la position de l'image est $p' = \overline{H'A'} = 10$ cm. La relation de conjugaison s'écrit $\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$, où $p = \overline{HA}$. On a donc $p = \frac{p'f}{p'-f'} = -\frac{p'f'}{p'-f'} = \frac{10 * \frac{81}{14}}{10 - \frac{81}{14}} = -\frac{810}{59} = -13{,}73$ cm.

Construction : elle est représentée figure 24.3. Elle utilise un rayon incident, issu du point B, parallèle à l'axe principal de la combinaison. En sortant de la combinaison, il coupe l'axe principal en F', le foyer image. L'autre rayon issu du point B passe par le foyer F de la combinaison et ressort parallèle à l'axe principal. Les deux rayons émergents se croisent physiquement au point B' ; en abaissant à partir de B' la perpendiculaire à l'axe principal, on trouve l'image réelle, $A'B'$.

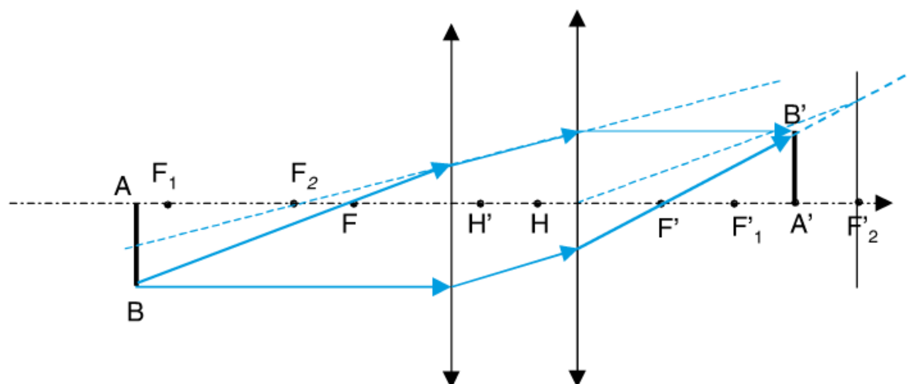


Figure 24.3

4) Pour une combinaison de deux lentilles, le grandissement transversal s'écrit : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p}$. Avec $p = -\frac{810}{59}$ cm $= -13{,}73$ cm, $p' = 10$ cm et $\overline{AB} = 2$ cm, $\gamma = -\frac{59}{81} = -0{,}73$ et $\overline{A'B'} = -2 * 0{,}73$ cm $= -1{,}46$ cm. On remarque que l'image est réelle ($p' > 0$), renversée ($\gamma < 0$) et plus petite que l'objet ($|\gamma| < 1$).

Angles d'ouverture d'une combinaison de lentilles

Soit une combinaison de deux lentilles minces convergentes. Les quatre éléments cardinaux, F, F', H et H', sont représentés figure 24.4. Si un objet réel AB est vu depuis le point principal objet H sous l'angle α, sous quel angle α' sera vue son image $A'B'$ depuis le point principal image H' ? On utilisera le grandissement transversal γ de l'image.

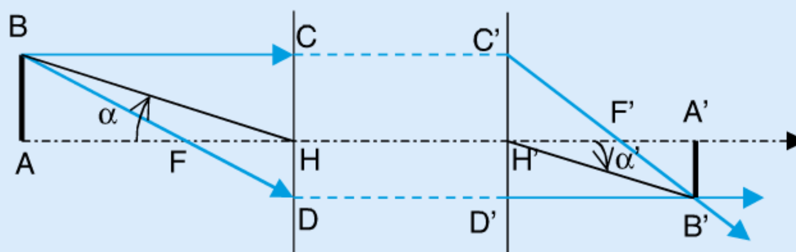


Figure 24.4

Solution

Les angles α et α' sont tels que $\tan(\alpha) = \frac{\overline{HA}}{\overline{AB}}$ et $\tan(\alpha') = \frac{\overline{H'A'}}{\overline{A'B'}}$. Notons que ces deux angles, orientés dans le sens des aiguilles d'une montre, sont négatifs.

Par ailleurs, nous avons $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p}$, où $p = \overline{HA}$ $p' = \overline{H'A'}$. En réunissant ces équations, on trouve $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{H'A'}}{\tan(\alpha')} \frac{\tan(\alpha)}{\overline{HA}} = \frac{p'\tan(\alpha)}{p\tan(\alpha')} = \frac{p'}{p}$. Ceci entraîne que $\alpha' = \alpha$.

L'œil humain

FICHE 25

I Son schéma optique

L'œil normal d'un être humain, appelé encore œil emmétrope, est une combinaison des deux éléments simples suivants (voir figure 25.1) :

- Le premier, la cornée, est un dioptre sphérique convergent, de rayon de courbure $r_1 = +8$ mm, de sommet S_1 ; il sépare l'air, d'indice égal à 1, de l'humeur aqueuse, d'indice 1,33. Par conséquent, ses distances focales objet et image sont respectivement $f_1 = -24{,}24$ mm et $f_1' = 32{,}24$ mm.
- Le second, le cristallin, est une lentille convergente, d'indice 1,42, entourée de l'humeur aqueuse, d'indice 1,33, et délimitée par deux dioptres sphériques de rayons de courbure respectifs $r_2 = +10$ mm et $r_2' = -6$ mm. Ses distances focales objet et image sont respectivement égales à $f_2 = -56{,}04$ mm et $f_2' = 56{,}04$ mm et l'on a $f_2' = -f_2$.

Les sommets de la cornée et du cristallin, sont séparés d'une distance algébrique $e = 5{,}6$ mm.

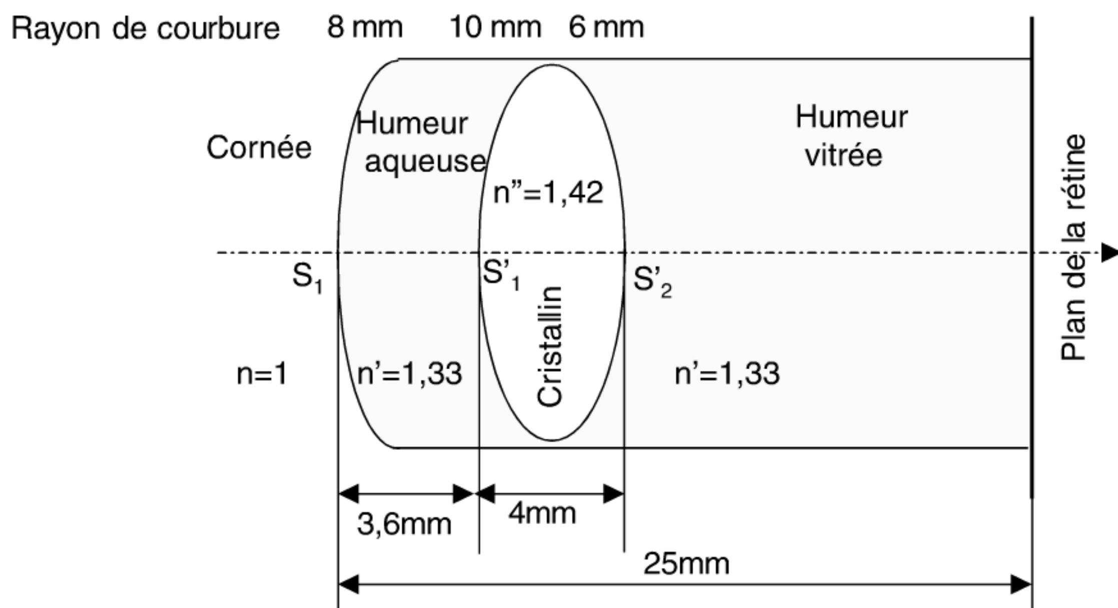


Figure 25.1

II Ses quatre éléments cardinaux

Les caractéristiques d'un œil humain sans défaut, formé de la combinaison d'un dioptre sphérique (la cornée) et d'une lentille mince (le cristallin), sont :

- Un intervalle optique : $\Delta = \overline{F'_1F_2} = -82{,}68$ mm
- Une distance focale objet : $f = \overline{HF} = -16{,}43$ mm
- Une distance focale image : $f' = \overline{H'F'} = 21{,}85$ mm. On remarque que l'œil est une combinaison convergente puisque $f' > 0$. D'autre part, $f' = -1{,}33f$, car les milieux extrêmes de la combinaison sont différents (air et humeur aqueuse).

D'autre part, l'on a : $\overline{S_1H} = 1{,}64$ mm et $\overline{S_1H'} = 1{,}81$ mm ; de même, $\overline{S_1F} = \overline{S_1H} + \overline{HF} = -14{,}79$ mm et $\overline{S_1F'} = \overline{S_1H'} + \overline{HF'} = +23{,}66$ mm.
On connaît donc la position des quatre éléments cardinaux de l'œil, F, F', H et H' par rapport au sommet S_1 de la cornée.
Enfin, on remarque que $\overline{HH'} = 0{,}17$ mm ; les deux points principaux de l'œil sont donc pratiquement confondus, à 2 mm derrière la cornée. Leur distance étant très inférieure à f', on peut considérer que l'œil humain est équivalent à une lentille mince convergente de sommet $H' \equiv H$ et de distances focales $f = -16{,}43$ mm et $f' = 21{,}85$ mm. Les distances focales objet et image de cette lentille équivalente sont différentes car l'œil humain sépare deux milieux différents d'indices respectifs 1 et 1,33.

III Sa relation de conjugaison

L'œil est une combinaison séparant l'air, d'indice $n = 1$, de l'humeur aqueuse, d'indice $n' = 1{,}33$. Sa relation de conjugaison s'écrit donc (voir fiches 21 et 22) : $\dfrac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} + \dfrac{\overline{HF}}{\overline{HA}} = 1$, ou encore $\dfrac{f'}{p'} + \dfrac{f}{p} = 1$. Avec $f' = -n'f$. En posant $p' = \overline{H'A'}$ et $p = \overline{HA}$, on peut exprimer la relation de conjugaison de l'œil sous la forme suivante :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'}{f'} \quad \text{avec} \quad n = 1 \quad \text{et} \quad n' = 1{,}33$$

On retrouve bien la relation de conjugaison d'une lentille mince de sommet H' et de milieux extrêmes d'indices n et n'.

IV Son pouvoir d'accommodation

Les images à travers l'œil ne sont nettes que si elles se forment sur la rétine, assimilable à un écran fixe positionné à 25 mm de la cornée. Par conséquent, lorsqu'il regar-

de des objets à des distances différentes, l'œil doit ajuster ses caractéristiques pour que la position de leur image reste sur la rétine. On appelle cette propriété le pouvoir d'accommodation. Il n'est possible que grâce à des muscles qui déforment le cristallin et en modifient la distance focale.

On peut vérifier à partir de la relation de conjugaison de l'œil, $\frac{n'}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{n'}{f'}$, que, si la valeur de p' est fixe, quelle que soit la distance p à laquelle se trouve l'objet, f' doit nécessairement varier. Ceci traduit le pouvoir d'accommodation de l'œil.

V Sa vergence

A partir de la relation de conjugaison de l'œil, on peut en déduire sa vergence $\phi = \frac{n'}{f'} = 60\,\delta$.

Cette valeur est calculée pour une valeur donnée de la distance focale image f' de l'œil. C'est celle qui correspond à une observation sans accommodation. L'œil est alors dit au repos.

Cela correspond au cas où l'on regarde des objets réels ($p < 0$) situés à l'infini ($p \to -\infty$ et $p' = f' = \frac{n'}{\phi}$).

VI Amplitude dioptrique de l'œil normal : du punctum proximum (PP) au punctum remotum (PR)

L'œil normal (ou emmétrope) a le pouvoir d'accommoder, et donc de faire varier sa vergence sur une amplitude maximale correspondant à la vision d'un objet situé entre deux positions extrêmes. Par convention, on choisit ces deux positions respectivement comme le punctum remotum, noté PR (correspondant à $p \to -\infty$) et le punctum proximum, noté PP (correspondant à $p = -25$ cm).

- Au punctum proximum, noté PP, $p = -25$ cm ; la relation de conjugaison de l'œil donne $\phi_{PP} = -64\,\delta$.
- Au punctum remotum PR, $p \to -\infty$; la relation de conjugaison de l'œil donne $\phi_{PR} = 60\delta$; l'œil est bien au repos et n'accommode pas.

On considère que l'amplitude dioptrique d'un l'œil humain emmétrope est $A_{\text{œil}} = \phi_{PP} - \phi_{PR} = (64 - 40)\,\delta = 4\,\delta$. Notons que cette valeur est celle d'un adulte âgé de moins de 45 ans environ. Un enfant de plus de 5 ans aura une amplitude dioptrique plus importante, valant jusque 14 δ.

Calculs sur l'œil

1) A partir des rayons de courbure de l'œil et des indices des milieux qui le composent (Figure 25.1), démontrer que les distances focales du dioptre sphérique (la cornée) sont $f_1 = -24{,}24$ mm et $f_1' = 32{,}24$ mm et que le cristallin est équivalent à une lentille de distances focales $f_2 = -54{,}04$ mm et $f_2' = 56{,}04$ mm. Montrer que cette lentille est mince.

2) La distance du sommet de la cornée au centre du cristallin est égale à 5,6 mm. En déduire que l'intervalle optique de l'œil est $\Delta = -82{,}68$ mm, que ses distances focales sont $f = -16{,}43$ mm et $f' = 21{,}85$ mm et que $\overline{S_1 H} = 1{,}64$ mm, $\overline{S_1 H'} = 1{,}81$ mm et $\overline{HH'} = 0{,}17$ mm.

Solution

1) La cornée est un dioptre de rayon de courbure $r = 8$ mm, séparant deux milieux d'indices respectifs $n = 1$ et $n' = 1{,}33$. Ses distances focales sont données par les formules suivantes :

$$f_1 = -\frac{nr}{n'-n} = -\frac{r}{0{,}33} = -24{,}24 \text{ mm} \quad \text{et} \quad f_1' = \frac{n'r}{n'-n} = \frac{1{,}33r}{0{,}33} = 32{,}24 \text{ mm}.$$

La lentille qui constitue le cristallin a une face d'entrée de sommet S_1' et de rayon de courbure $r_2 = 10$ mm et une face de sortie de sommet S_2' et de rayon de courbure $r_2' = -6$ mm. L'indice de la lentille est $n'' = 1{,}42$ et elle est plongée dans un milieu d'indice $n' = 1{,}33$. En posant $n_L = \dfrac{n''}{n'} = 1{,}068$, on peut considérer que la lentille épaisse est taillée dans un milieu d'indice n_L et plongée dans l'air d'indice 1. La vergence ϕ_c de cette lentille, et donc sa distance focale image f_2', peuvent être déterminées par la formule de Gullstrand, appliquée à la combinaison de deux dioptres sphériques entourés d'air : $\phi_c = \phi_1 + \phi_2 - e_1 \dfrac{\phi_1 \phi_2}{n_L}$, où $e_1 = \overline{S_1' S_2'} = 4$ mm, $\phi_1 = \dfrac{n_L - 1}{r_2}$ et $\phi_2 = \dfrac{1 - n_L}{r_2'}$.

On déduit que $\phi_c = (n_L - 1)\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2'}\right) + e_1 \dfrac{(n_L - 1)^2}{n_L r_2 r_2'} = \dfrac{1}{f_2'}$ soit encore que $\phi_c = 18{,}133 - 0{,}288 = 17{,}845\,\delta$ et $f_2' = \dfrac{1}{\phi_c} = 56{,}04$ mm. Les rayons de courbure des deux dioptres sont exprimés en mètre. Enfin, $f_2 = -f_2' = -56{,}04$ mm.

On remarque que le deuxième terme de la formule de Gullstrand vaut 0,288, ce qui est très faible devant le premier terme valant 18,133. On peut donc le négliger et écrire que $\dfrac{1}{f_2'} = \phi_c \approx (n_L - 1)\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_2'}\right)$, ce qui correspond à la distance focale image d'une lentille mince (voir fiche 18). Le cristallin est donc équivalent à une lentille mince d'in-

dice $n_L = 1{,}068$ plongée dans l'air, de distance focale image $f_2 = -f'_2 = -56{,}04$ mm. On peut considérer que le sommet de cette lentille est placé à mi chemin entre les deux sommets S'_1 et S'_2 des deux dioptres qui forment ses deux faces.

2) On étudie le système formé par la cornée et le cristallin. En appliquant les formules des combinaisons, on a

$\Delta = \overline{F'_1F_2} = e - f'_1 + f_2 = e - (f'_1 + f'_2) = 5{,}6 - (32{,}24 + 56{,}04) = -82{,}68$ mm,

$$f = \overline{HF} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = -\frac{24{,}24 * 56{,}04}{82{,}68} = -16{,}43 \text{ mm}$$

et $f' = \overline{H'F'} = -\dfrac{f'_1 f'_2}{\Delta} = \dfrac{32{,}24 * 56{,}04}{82{,}68} = 21{,}85$ mm.

On remarque que les distances focales $f = -16{,}43$ mm et $f' = 21{,}85$ mm de l'œil humain sont bien différentes car ils séparent deux milieux différents d'indices respectifs 1 et 1,33.

Enfin, $\overline{S_1H} = \dfrac{ef_1}{\Delta} = \dfrac{5{,}6 * 24{,}24}{82{,}68} = 1{,}64$ mm et $\overline{S_2H'} = \dfrac{ef'_2}{\Delta} = -\dfrac{5{,}6 * 56{,}04}{82{,}68}$ $= -3{,}79$ mm (voir fiche 22).

On a donc $\overline{S_1H'} = \overline{S_1S_2} + \overline{S_2H'} = 5{,}6 - 3{,}79 = 1{,}81$ mm.

Finalement, $\overline{HH'} = \overline{HS_1} + \overline{S_1H'} = -1{,}64 + 1{,}81 = 0{,}17$ mm. La très faible valeur de $\overline{HH'}$ justifie que l'on considère que l'œil est équivalent à une lentille mince de sommet $H' \equiv H$.

Le pouvoir d'accommodation

Un œil normal est capable d'accommoder, c'est-à-dire de former une image sur la rétine d'un objet dont la position varie entre 25 cm et l'infini. Si l'œil est assimilable à une lentille convergente de distance focale fixe, $f' = 2$ cm. De combien faudrait-il pouvoir déplacer la lentille équivalente pour effectuer l'accommodation de l'œil ?

Solution

Considérons l'œil comme une lentille mince convergente, de distance focale image fixe $f' = 2$ cm. Imaginons un objet situé à l'infini ; son image A' est nette sur la rétine (œil emmétrope), située dans le plan focal image, à 2 cm de la lentille.

Si maintenant cet œil regarde un objet placé 25 cm devant la lentille (l'œil), son image ne sera pas placée dans le plan focal image. La rétine ne pouvant se déplacer, c'est la lentille qui doit bouger pour que l'image revienne sur la rétine et soit nette. Le sommet S de la lentille va donc se déplacer.

A' doit être considéré comme un point fixe placé sur la rétine ($p' = 2$ cm). Si A est initialement à $p = -25$ cm en avant de la lentille, on peut écrire $\overline{AA'} = \overline{AS} + \overline{SA'}$ $= p' - p = 27$ cm. Un mouvement de la lentille entraîne un changement des valeurs

prises par p et p' mais l'on a toujours $p' - p = 27$ cm. La relation de conjugaison donne $\frac{n'}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{n'}{f'}$, soit, $p' = \frac{n'pf'}{p + n'f'} = \frac{2{,}66p}{2 + 1{,}33p}$ $= \frac{2{,}66(p' - 27)}{2 + 1{,}33(p' - 27)} = \frac{2{,}66p' - 71{,}82}{1{,}33p' - 33{,}91}$. On trouve donc que $1{,}33p'^2 - 36{,}57p'$ $+71{,}82 = 0$. Cette équation a deux solutions : $p' = 2{,}13$ cm soit $p = -24{,}87$ cm, et $p' = 25{,}37$ cm soit $p = -1{,}63$ cm. On ne retiendra pas la deuxième solution, incompatible avec la dimension physiologique de l'œil. Pour accommoder, la lentille mince doit donc être déplacée vers S de $25 - 24{,}87 = 0{,}13$ cm.

La larme à l'œil !

1) Un œil humain emmétrope est assimilé à un dioptre sphérique de rayon de courbure R séparant l'air, d'indice $n = 1$, de l'intérieur de l'œil, d'indice $n' = 4/3$ (Figure 25-2).

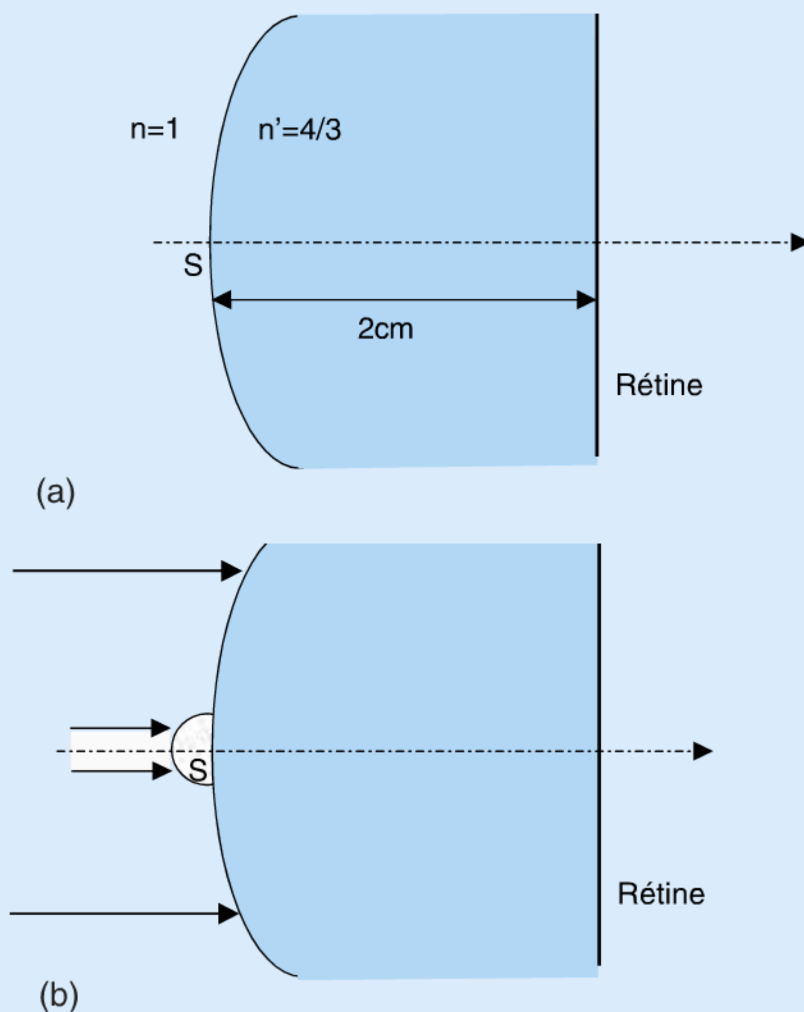


Figure 25-2

La rétine se trouvant à 2 cm du sommet du dioptre, calculer le rayon de courbure lorsque l'on regarde un objet placé à l'infini.

2) Une goutte de larme de 1 mm de rayon de courbure et d'indice 4/3 se trouve juste au centre de l'œil. Dessiner le cheminement des rayons parallèles rentrant dans l'œil. Comment apparaît la goutte ?

Solution

1) Dans un œil emmétrope, l'image nette est située sur la rétine. Si l'objet est situé à l'infini, la rétine coïncide avec le plan focal image de l'oeil, distant de $f' = 2$ cm du sommet S de l'œil. D'autre part, si l'œil est assimilé à un dioptre sphérique de rayon de courbure R séparant deux milieux d'indices respectifs n et n', $f' = 2\,\text{cm}$ $= \dfrac{n'R}{n'-n} = \dfrac{\frac{4}{3}R}{\frac{4}{3}-1} = 4R$. On en déduit que $R = 0{,}5$ cm.

2) La larme et l'intérieur de l'œil ayant le même indice, la surface de la goutte se comporte comme un dioptre sphérique de distance focale image égale à 4 mm. Tous les rayons en incidence parallèle arrivant sur la larme convergent donc à 4 mm à l'intérieur de l'œil (Figure 25.3). Le faisceau entrant par la larme éclaire donc complètement la rétine et on voit un voile blanchâtre. C'est ce qui explique que la vision soit brouillée lorsque l'on pleure.

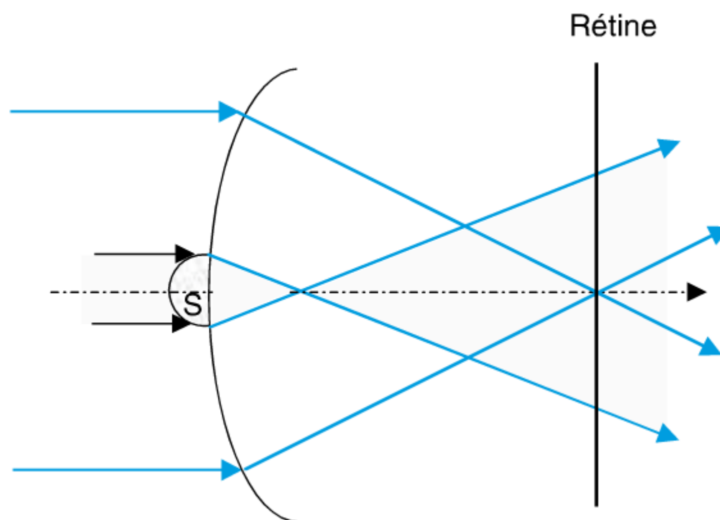


Figure 25.3

FICHE 26

Défauts de l'œil et leur correction

I Les défauts de l'œil

L'œil humain peut présenter des défauts. Nous allons décrire les trois plus fréquents :

- **La presbytie :** avec l'âge, le cristallin durcit et devient moins déformable, ce qui provoque une diminution de l'amplitude dioptrique de l'œil et par conséquent une modification de son pouvoir d'accommodation. Ce défaut touche tout le monde vers 50 ans (voire plus jeune) : l'amplitude dioptrique A_{oeil} diminue à partir d'une valeur moyenne initiale égale à 4 δ pour atteindre 1 δ environ à l'âge de 60 ans.

  Lorsque la vergence de l'œil est touchée par la presbytie, le PR n'est pas touché, mais le PP est considérablement modifié. Nous allons décrire ce qui se passe en prenant comme exemple un œil dont l'amplitude dioptrique est réduite à $A_{\text{oeil}}^{\text{presbyte}} = 3\ \delta$:

  – Le Punctum Remotum (PR), qui correspondait à $p \to -\infty$ et à $\phi_{\text{PR}} = 60\ \delta$ pour l'œil emmétrope, n'est pas modifié car cela correspond à une situation où l'œil est au repos et n'accommode pas. On a donc $\phi_{\text{oeil}}^{\text{presbyte}} = 60\ \delta$.

  – Par contre, le Punctum Proximum (PP) d'un œil presbyte est donné par $\phi_{\text{PP}}^{\text{presbyte}} = 60\ \delta + A_{\text{oeil}}^{\text{presbyte}} = 63\ \delta$ (au lieu de 64 δ). La relation de conjugaison de l'œil montre que la vision nette de près n'est possible que si l'objet est à une distance minimale $p = -33$ cm (au lieu de –25 cm). Sans lunettes, une personne ayant une telle amplitude dioptrique doit donc, pour voir net, éloigner l'objet qu'elle regarde de 12 cm.

  Plus un être humain vieillit, plus sa presbytie est prononcée. L'amplitude dioptrique de son œil, A_{oeil}, diminue au fil des ans. Si $A_{\text{oeil}}^{\text{presbyte}} = 1\ \delta$, alors $\phi_{\text{PP}}^{\text{presbyte}} = 61\ \delta$, ce qui correspond à une vision nette de près (vision PP) si l' objet est distant au minimum de 1 m ($p = -1$ m).

- **La myopie :** un œil myope est plus convergent qu'un œil emmétrope. Sa vergence est donc supérieure à celle de l'oeil emmétrope quelle que soit la position de l'objet. L'image d'un objet situé à $p \to -\infty$ (PR) ne se forme donc plus sur la rétine mais en avant. C'est aussi le cas de l'image d'un objet situé à $p = -25$ cm (PP).

– au Punctum Remotum (PR), la vergence d'un œil myope est $\phi_{\text{PR}}^{\text{myope}} = (60 + \varepsilon)\ \delta$ avec $\varepsilon > 0$
– au Punctum Proximum (PP), elle s'écrit $\phi_{\text{PP}}^{\text{myope}} = (64 + \varepsilon)\ \delta$.

Si, par exemple, la myopie est d'une dioptrie, ($\varepsilon = 1$), $\phi_{\text{PR}}^{\text{myope}} = 61\ \delta$, ce qui correspond à une vision nette à un PR situé en $p = -1$ m ; $\phi_{\text{PP}}^{\text{myope}} = 65\ \delta$, ce qui correspond à une vision nette à un PP situé à $p = -20$ cm ; le PR et le PP d'un œil myope sont donc plus faibles que pour un œil emmétrope. Un myope voit donc très mal les objets éloignés et a l'impression que sa vision de près est meilleure que celle d'un œil emmétrope.

- **L'hypermétropie :** la situation est inverse de la précédente. Un œil hypermétrope est moins convergent qu'un œil emmétrope. Sa vergence est donc inférieure à celle de l'oeil emmétrope quelle que soit la condition de vision (PP ou PR). L'image d'un objet situé à $p \to -\infty$ (PR) ne se forme donc plus sur la rétine mais après. C'est aussi le cas de l'image d'un objet situé en $p = -25$ cm (PP).

– au Punctum Remotum (PR), la vergence d'un œil hypermétrope est $\phi_{\text{PR}}^{\text{hypermétrope}} = (60 - \varepsilon)\ \delta$, avec $\varepsilon > 0$
– au Punctum Proximum (PP), elle s'écrit $\phi_{\text{PP}}^{\text{hypermétrope}} = (64 - \varepsilon)\ \delta$.

Si, par exemple, l'hypermétropie est d'une dioptrie, $\varepsilon = 1$; on a alors $\phi_{\text{PR}}^{\text{hypermétrope}} = 59\ \delta$, ce qui correspond à un PR situé en $p = 1$ m ($p > 0$ la vision de loin d'un objet réel imposent que p soit négatif ne peut jamais être nette) ; $\phi_{\text{PP}}^{\text{hypermétrope}} = 63\ \delta$, ce qui correspond à un PP situé en $p = -33$ cm. La vision de loin de l'œil hypermétrope est donc altérée et son PP a reculé.

II La correction des défauts de l'œil

Un œil présentant des défauts doit être corrigé au moyen d'une paire de lunettes ou de lentilles de contact. Afin de proposer une description simple des verres de correction possibles, nous allons faire deux hypothèses qui se justifient dans le cadre d'une approche pédagogique.

Dans ce qui suit, nous considérons que l'œil est équivalent à une lentille mince convergente de vergence ϕ_{oeil}.

De plus, par souci de simplicité, nous négligons la distance séparant les verres de lunettes de l'œil et considérer l'ensemble « œil + paire de lunettes » comme une combinaison de deux lentilles minces accolées. On a donc :

$$\phi_{\text{oeil avec un défaut}} + \phi_{\text{correction du défaut}} = \phi_{\text{oeil corrigé}}$$

- **Pour la presbytie**, il ne faut corriger que la vision de près sans affecter, si possible, la vision de loin. La vergence des verres correcteurs doit être telle que $\phi_{\text{correction presbyte}}^{\text{PR}} = 0$ et $\phi_{\text{correction presbyte}}^{\text{PP}} = A_{\text{oeil}}^{\text{presbyte}}$. Dans l'idéal, un presbyte doit

porter des verres correcteurs équivalents à des lentilles convergentes permettant de ne corriger que le PP et dont la vergence est égale à $A_{\text{oeil}}^{\text{presbyte}}$.

- **Pour la myopie,** la correction doit être la même pour la vision PP et PR soit $\phi_{\text{correction myopie}} = -\varepsilon$, ce qui correspond à une lentille divergente. On a donc $\phi_{\text{oeil myope}} + \phi_{\text{correction myopie}} = \phi_{\text{oeil emmétrope}}$ et la myopie peut être parfaitement corrigée.
- **Pour l'hypermétropie**, c'est la situation opposée. Il faut utiliser la même correction $\phi_{\text{correction}} = +\varepsilon$ pour la vision PP et PR, ce qui correspond à une lentille convergente. On a donc $\phi_{\text{oeil hypermétrope}} + \phi_{\text{correction hypermétropie}} = \phi_{\text{oeil emmétrope}}$ et l'hypermétropie peut aussi être parfaitement corrigée.

L'œil artificiel ou la construction d'un « œil » sur un banc optique

Pour simuler un œil normal au repos, on place sur un banc d'optique une lentille mince convergente (L_1) de distance focale courte, f'_1. Un écran, placé à 2 cm après la lentille, joue le rôle de la rétine de l'œil.

1) Si l'image nette d'un objet ponctuel situé à l'infini ne peut pas être formée sur l'écran mais 0,2 cm après ce dernier, quel type d'œil simule la lentille L_1 ?

2) Quelles devraient être la nature et la distance focale image de la lentille L_1 pour que l'image d'un objet ponctuel situé à l'infini soit nette sur l'écran qui simule la rétine ?

3) En fait $f'_1 = 2{,}2$ cm. On accole donc devant la lentille L_1 une lentille mince L_0 de distance focale f'_0 afin que la combinaison permette d'obtenir une image nette sur l'écran d'un objet à l'infini. Quelle est la distance focale et la nature de L_0 ?

Solution

1) Supposons que la lentille mince L_1 simule un œil. Si l'image nette d'un objet situé à l'infini se forme après la rétine, cet œil est hypermétrope.

2) La relation de conjugaison de la lentille mince est $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'_1}$. Si $p' = 2$ cm, $p = \frac{f'_1 p'}{f'_1 - p'} = \frac{2 f'_1}{f'_1 - 2}$. Pour un objet situé à l'infini, $p \to -\infty$. Afin que l'image soit nette, elle doit être située sur l'écran qui simule la rétine. L_1 doit être une lentille mince convergente de distance focale image $f'_1 = 2$ cm.

3) La distance focale de cet œil hypermétrope est $f'_1 = 2{,}2$ cm. Si L_0 et L_1 sont accolées, $\frac{1}{f'_0} + \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{f'}$. Pour que, d'un objet à l'infini, la combinaison permette d'obtenir une image nette sur l'écran, il faut que $f' = 2$ cm. On obtient alors $f'_0 = \frac{f' f'_1}{f'_1 - f'}$

$= \dfrac{2 * 2{,}2}{2{,}2 - 2} = 22$ cm. L_0 est donc aussi une lentille convergente mais de distance focale image dix fois plus grande que celle de L_1.

La presbytie et la cataracte

Quelle est l'origine de la presbytie ? Quelle est la différence avec la cataracte? Comment corriger ces deux défauts ?

Solution

La presbytie et la cataracte sont deux défauts de vision reliés à un dysfonctionnement du cristallin. Cependant, ils n'ont pas la même origine.

Le cristallin est une « lentille de distance focale variable ». Il permet, pour un œil normal, d'accommoder afin de placer toutes les images sur le plan de la rétine, quelle que soit la position de l'objet que l'on regarde, sans aucun déplacement des éléments optiques de l'œil. Le cristallin est constitué d'un noyau entouré de cellules géantes disposées en « pelures d'oignon » pouvant glisser les unes sur les autres, ce qui modifie sa forme.

Au fil des années, le cristallin perd de son élasticité et l'œil devient presbyte ; le pouvoir d'accommodation est réduit et seule la vision de près est touchée. Ce défaut de l'œil apparaît chez tout le monde. Pour corriger la presbytie, il faut porter des verres convergents qui corrigent la vision PP uniquement, d'où l'attrait pour les verres de type « demi-lunes ». Cependant, à travers de tels verres, on ne voit pas nettement les objets éloignés !

Chez certaines personnes, en général âgées, le cristallin s'opacifie, ce qui entraîne une perte de vision : elles sont atteintes de cataracte. On soigne aujourd'hui ce défaut en substituant au cristallin opaque un cristallin artificiel.

Quels sont défauts de l'œil de Patricia ?

1) Patricia a un Punctum Proximum (PP) situé à 30 cm. Quel est le défaut de son œil ?

2) On rappelle que l'œil sépare l'air, d'indice 1, de l'humeur aqueuse, d'indice $n' = 1{,}33$. Déterminer la nature et la vergence des verres correcteurs que doit porter Patricia pour que sa vision de près soit nette (PP) ? On supposera que les verres correcteurs sont accolés à l'œil.

3) Que devient son Punctum Remotum (PR) ?

Solution

1) Le PP de Patricia est situé à 30 cm au lieu de 25 cm, elle est presbyte.

2) Pour que sa presbytie soit corrigée, elle doit porter des verres convergents de vergence ϕ_{verres}. Pour un œil presbyte, il faut discerner la vergence de l'œil au PP, ϕ_{oeilP}, qui est affectée par la presbytie de celle au PR, ϕ_{oeil}, qui n'est pas affectée par l'âge.

Etude du PP (la vergence de l'œil est ϕ_{oeilP})

- Œil presbyte non corrigé : le PP est à 30 cm ($p_{\text{PP}} = -30$ cm), et la relation de conjugaison de l'œil presbyte s'écrit $\phi_{\text{oeilP}} = \dfrac{n'}{p'} - \dfrac{1}{(-30 * 10^{-2})} = \dfrac{n'}{p'} + 3{,}33$.
- Œil presbyte corrigé avec un verre de correction de la presbytie : la formule des lentilles accolées donne $\phi = \phi_{\text{oeilP}} + \phi_{\text{verres}} = \dfrac{n'}{p'} + 3{,}33 + \phi_{\text{verres}}$. D'autre part, le verre correcteur de la presbytie + œil presbyte ont un PP corrigé soit $p^C_{\text{PP}} = -25$ cm. La relation de conjugaison de cette combinaison s'écrit $\phi = \dfrac{n'}{p'} - \dfrac{1}{p^C_{\text{PP}}} = \dfrac{n'}{p'} - \dfrac{1}{(-25 * 10^{-2})} = \dfrac{n'}{p'} + 4$. On déduit de la comparaison des deux relations de conjugaison précédentes que $3{,}33 + \phi_{\text{verres}} = 4$ et on trouve $\phi_{\text{verres}} = 0{,}67\ \delta$ qui correspond à la vergence des verres correcteurs que Patricia doit porter pour corriger sa presbytie.

3) *Etude du PR (la vergence de l'œil est ϕ_{oeil})*

Soit p_{PR} et p^C_{PR} la valeur du Punctum Remotum de Patricia sans et avec ses verres correcteurs respectivement.

- Œil presbyte non corrigé : $p_{\text{PR}} = -\infty$ et sa relation de conjugaison s'écrit $\phi_{\text{oeil}} = \dfrac{n'}{p'} - \dfrac{1}{(-\infty)} = \dfrac{n'}{p'}$.
- Verre de correction de la presbytie + œil presbyte : la formule des lentilles accolées donne $\phi' = \phi_{\text{oeil}} + \phi_{\text{verres}} = \dfrac{n'}{p'} + 0{,}67$ et la relation de conjugaison de cette combinaison est $\phi' = \dfrac{n'}{p'} - \dfrac{1}{p^C_{\text{PR}}}$. La comparaison des deux relations précédentes donne $p^C_{\text{PR}} = -1{,}49$ m qui représente la vision maximale de loin de Patricia. Les lunettes adaptées à la presbytie sont donc un handicap dans sa vision de loin.